

e und π sind transzendent

Top 10: Platz 9



@pixabay (bearbeitet)

INHALT

Transzendenz.....	2
Beweis der Transzendenz von e	4
Der Term P	7
Der Term Q	8
Conclusio	11
Die Transzendenz von π	12
Anhang	13
Das Integral – Eine Einführung	13
Propositionen	15
Beweis Proposition 1	15
Beweis Proposition 2	16
Satz 1	18
Satz 2	19

TRANSCENDENZ

Der Begriff „Transzendenz“ kommt von lateinisch „transcendentia“ und bedeutet „das Überschreiten“. Allgemein gilt als transzendent, was außerhalb unserer Sinneswahrnehmung liegt. In der Mathematik sind die transzendenten Zahlen Teil der reellen und komplexen Zahlen.

Zahlenbereiche entstanden in der Geschichte der Mathematik ständig aus dem Motivation heraus, Gleichungen lösen zu können, über welche sie dann auch definiert sind. Auch in der Schreibweise neuer Zahlen bildet sich das ab, indem sie mit Hilfe der bekannten natürlichen Zahlen und Sonderzeichen geschrieben werden.

$x + 2 = 0 \rightarrow -2$	$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$	Def.: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ und $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$!!!
$2x - 1 = 0 \rightarrow \frac{1}{2}$	$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$	
$x^2 - 2 = 0 \rightarrow \sqrt{2}$	$\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$	
$x^2 + 2 = 0 \rightarrow i\sqrt{2}$	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$	

Die reellen und komplexen Zahlen (\mathbb{R}, \mathbb{C}) ermöglichen es, Polynomgleichungen zu lösen. Zu diesem Zweck wurden sie auch großteils erfunden. So sind beispielsweise die Lösungen der Gleichung

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

die vier irrationalen Zahlen $x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{5 \pm \sqrt{2}}$.

Im Gegensatz dazu scheint die irrationale Kreiszahl π nicht als Lösung solch einer Polynomgleichung in Frage zu kommen.

DEFINITION: $\mathbb{Z}[x]$

$\mathbb{Z}[x]$ bezeichnet die Menge aller Polynome $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ mit ganzzahligen Koeffizienten und Variabel x . $\mathbb{Z}[x]$ wird auch als Polynomring bezeichnet, wobei dann auch Polynomaddition und Polynommultiplikation inkludiert sind.

Das Nullpolynom $o(x) = 0x^n \pm \dots \pm 0$ ist allerdings in unseren Überlegungen ausgeschlossen.

Ist eine Zahl **Lösung einer algebraischen Gleichung** (Polynomgleichung), so nennt man sie „**algebraisch**“. Im Unterschied dazu heißen Zahlen, welche nie Lösungen algebraischer Gleichungen sein können, „**transzendent**“.

DEFINITION: algebraisch

Eine reelle (oder komplexe) Zahl α heißt **algebraisch**, wenn ein Polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (n \in \mathbb{N}, \quad a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_n \neq 0)$$

mit $p(\alpha) = 0$ existiert. Das heißt:

$$\exists p \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{o\} : p(\alpha) = 0$$

DEFINITION: transzendent

Eine reelle (oder komplexe) Zahl τ heißt transzendent, wenn kein Polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (n \in \mathbb{N}, \quad a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_n \neq 0)$$

mit $p(\tau) = 0$ existiert. Das heißt:

$$\forall p \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\} : p(\tau) \neq 0$$

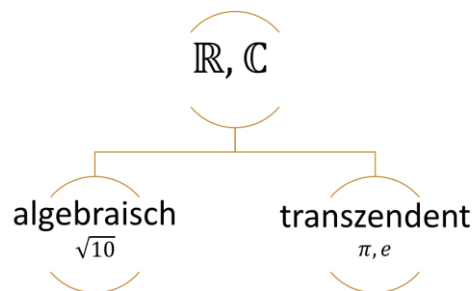


Abb. 1

Bezüglich der Lösungen beschränken wir uns im Folgenden auf \mathbb{R} !

Die bekanntesten transzendenten reellen Zahlen sind die Eulersche Zahl e und die Kreiszahl π . Andere transzendente Zahlen sind $2^{\sqrt{2}}$, $\ln(5)$, $\sin(20^\circ)$ und viele mehr.

Es gibt sogar *mehr transzendente Zahlen als algebraische*. Dies deshalb, da es sicher nur abzählbar viele Polynome gibt und die wiederum je nur endlich viele Nullstellen. Somit kann es nur abzählbar viele algebraische Zahlen geben, \mathbb{R} ist aber überabzählbar.

Zur Schreibweise für Polynome:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n x^n + \dots a_j x^j \dots + a_0$$

oder mit der kleinsten Potenz beginnend

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{j=0}^n a_j x^j$$

Schreibweise: Im Folgenden wird die Tilde (\sim) öfters für eine konkret berechnete, aber nicht bekannte Zahl verwandt.

Beispiele: $4x^2$, $5x^6 \rightarrow \sim x^\sim$; $6! \rightarrow \sim!$; $8 \cdot 4! \rightarrow \sim(\sim!)$

BEWEIS DER TRANSZENDENZ VON e

Um die Transzendenz von e zu beweisen muss gezeigt werden, dass das Ergebnis einer endlichen Summe von Vielfachen von Potenzen von e nie die Null sein kann.

$$\forall p \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}: p(e) = a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \dots + a_1 e + a_0 \neq 0$$

Dabei wird $a_n \neq 0$ und $a_0 \neq 0$ vorausgesetzt.

(a_n steht für die höchste Potenz und damit den Grad des Polynoms. Eine höchste Potenz muss es geben, sonst wäre es das auszuschließende Nullpolynom.)

Ist $a_0 = 0$, so kann man e herausheben

$$e \cdot (a_n e^{n-1} + a_{n-1} e^{n-2} + \dots + a_1) \neq 0$$

und kommt damit zum gleichen Problem nur ein Grad niedriger.)

Wir können jetzt nicht alle Polynome $p \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$ durchprobieren und das unter der Prämisse, dass wir von der Eulerschen Zahl ja nur etwa 31 Billionen Stellen kennen (Stand 2020), dies also durch einfaches Einsetzen nicht überprüfen können!

ZUR VORGEHENSWEISE

1. Eine in solchen Fällen gerne angewandte Beweismethode ist die des **indirekten Beweises**. Dabei geht man sehr wohl von der Existenz eines Gegenbeispiels $p^*(x)$ aus mit

$$p^*(e) = a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \dots + a_1 e + a_0 = 0$$

Es muss nun bewiesen werden, dass genau das nicht möglich ist.

2. Durch gezielte Umformungen versucht man eine äquivalente Gleichung zu bekommen, bei der man definitiv sieht, ob e eine Lösung ist oder nicht.

Dazu eine Analogie: Gefragt sei, ob die Gleichung $2,7 \cdot x = 17$ eine ganzzahlige Lösung besitzt.

Als Äquivalenzumformungen werden Multiplikationen gewählt.

a) $2,7 \cdot x = 17 \mid \cdot 2$	b) $2,7 \cdot x = 17 \mid \cdot 3$	c) $2,7 \cdot x = 17 \mid \cdot 9$	d) $2,7 \cdot x = 17 \mid \cdot 18$
$5,4 \cdot x = 34$	$8,1 \cdot x = 51$	$24,3 \cdot x = 153$	$48,6 \cdot x = 306$

Erst in der Äquivalenzumformung c) zeigt sich offensichtlich, dass es keine ganzzahlige Lösung geben kann. Die Einerstelle eines Vielfachen von 25 muss eine 5 oder 0 sein. Ähnliche Argumentation in d).

Die Vorgangsweise zum Beweis der Transzendenz von e gleicht dieser in gewisser Weise.

Für die weitere Beweisführung orientieren wir uns an einem konkreten Beispiel, ohne aber die Allgemeingültigkeit aus den Augen zu verlieren.

KONKRETES BEISPIEL

Annahme z.B.: $p^*(x) = 2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3x - 4 = 0$ hat die Lösung $x_0 = 2,71 \dots$, also e .

$$p^*(e) = 2e^4 - 6e^3 + e^2 + 3e - 4 \stackrel{!}{=} 0$$

allgemein $p^*(e) = a_n e^n \pm \dots \pm a_1 e \pm a_0 = 0$

Man betrachtet eine auf $p^*(e)$ abgestimmten Funktion $f_{n;k}(x)$ ($n \dots$ Polynomgrad) mit einer noch näher zu diskutierenden Variablen k (hier beispielsweise $k = 6$) sowie deren Integral für $x > 0$.

SIEHE AUCH IM ANHANG: „DAS INTEGRAL – EINE EINFÜHRUNG“!

Die Funktionsgleichung:

$$f_{n;k}(x) = x^k [(x-1)(x-2) \cdot \dots \cdot (x-n)]^{k+1} \cdot e^{-x}$$

$$f_{4;6}(x) = x^6 [(x-1)(x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)]^7 \cdot e^{-x}$$

Die Integrale:

$$\int_0^\infty f_{n;k}(x) dx \stackrel{\text{z.B.}}{=} \int_0^\infty f_{4;6}(x) dx =: \int_0^\infty \in \mathbb{Z}$$

$$\int_0^\infty (4; 6) = 36584395057122167423246835214847508480$$

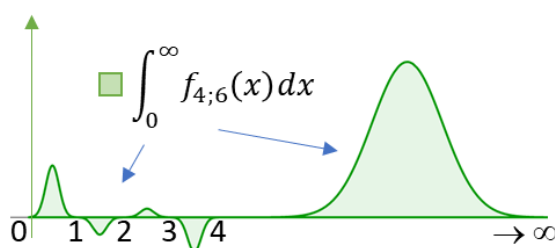


Abb. 2: Schematische, aber nicht maßstabsgetreue Darstellung von $f_{n;k}(x)$

Multiplikation der Gleichung $p^*(e) = 0$ mit dem Wert des Integrals:

$$2e^4 - 6e^3 + e^2 + 3e - 4 = 0 \mid \cdot \int_0^\infty = \text{z.B. } 36584395057122167423246835214847508480$$

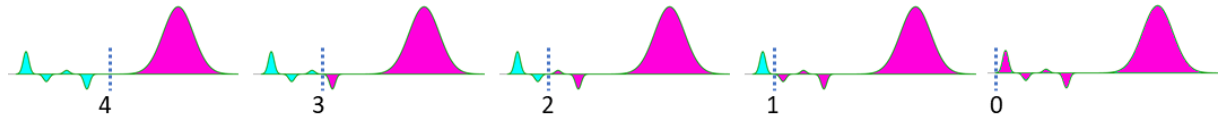
Dabei ist der Wert von $\int_0^\infty = \int_0^\infty (n; k)$ insofern noch variabel, als er von k abhängig ist. n ist durch den Grad des Polynoms festgelegt, k kann noch beliebig gewählt werden.

Die Multiplikation ergibt die äquivalente Gleichung

$$2e^4 \cdot \int_0^\infty - 6e^3 \cdot \int_0^\infty + e^2 \cdot \int_0^\infty + 3e \cdot \int_0^\infty - 4 \cdot \int_0^\infty = 0$$

Der Integralwert \int_0^∞ wird jetzt in jeweils zwei unterschiedliche Abschnitte $\int_0^\infty = \int_0^j + \int_j^\infty$ geteilt, wobei $j = 0, 1, 2, \dots, n$ die Nullstellen von $f_{n;k}(x)$ sind.

$$2e^4 \cdot \left(\int_0^4 + \int_4^\infty \right) - 6e^3 \cdot \left(\int_0^3 + \int_3^\infty \right) + e^2 \cdot \left(\int_0^2 + \int_2^\infty \right) + 3e^1 \cdot \left(\int_0^1 + \int_1^\infty \right) - 4e^0 \cdot \int_0^\infty = 0$$



Die linke Seite der Gleichung wird in zwei Teile P und Q geteilt.

$$P = 2e^4 \cdot \int_0^4 - 6e^3 \cdot \int_0^3 + e^2 \cdot \int_0^2 + 3e^1 \cdot \int_0^1 \quad \cong a_n e^n \cdot \int_0^n \pm \dots \pm a_1 e \cdot \int_0^1$$

$$Q = 2e^4 \cdot \int_4^\infty - 6e^3 \cdot \int_3^\infty + e^2 \cdot \int_2^\infty + 3e \cdot \int_1^\infty - 4 \cdot \int_0^\infty \cong a_n e^n \cdot \int_n^\infty \pm \dots \pm a_1 e \cdot \int_1^\infty \pm a_0 \cdot \int_0^\infty$$

In Summe müssten sie stets Null ergeben,

$$P + Q \stackrel{!}{=} 0,$$

ebenso wie nach Division durch $k!$

$$\frac{P}{k!} + \frac{Q}{k!} \stackrel{!}{=} 0.$$

Und zwar gleichgültig, welches k dem Integral zugrunde liegt.

Wäre dies der Fall, so wäre die Eulersche Zahl e Lösung der Polynomgleichung

$$p^*(x) = 2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3x - 4 = 0$$

Ziel des Widerspruchsbeweises ist es, Integralwerte $\int_0^\infty (n; k)$ zu finden, mit welchen man

$$\frac{P}{k!} + \frac{Q}{k!} \stackrel{!}{=} 0.$$

und damit die äquivalente Annahme $2e^4 - 6e^3 + e^2 + 3e - 4 = 0$ eindeutig widerlegen kann.

Dies lässt sich mit den Integralen der Funktionen $f_{n;k}(x)$ überprüfen, ohne die Zahl e tatsächlich einsetzen zu müssen!

VORSCHAU (SPOILER):

P : Von $P/k!$ kann gezeigt werden, dass es durch geeignete Wahl von k betragsmäßig beliebig klein ($\in]-1; 1[$) gemacht werden kann.

Q : Von $Q/k!$ kann gezeigt werden, dass es durch die Wahl von k ganzzahlig ungleich null gehalten werden kann ($\in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$).

In Summe kann sich das dann aber nicht mehr auf Null ausgehen!

$$\frac{P}{k!} + \frac{Q}{k!} \neq 0.$$

DER TERM P

Der Betrag von P lässt sich nach oben hin beschränken.

Der Term P beinhaltet die Integrale im Bereich der Nullstellen der Funktion $f_{n;k}$. Die Funktion ist dort beschränkt. Die Funktionsgleichung kann als Produkt eines k -abhängigen Teils $g(x)^k$ und eines k -unabhängigen Teils $h(x) \cdot e^{-x}$ geschrieben werden

$$f_{n;k}(x) = \underbrace{[x(x-1)(x-2) \cdot \dots \cdot (x-n)]^k}_{g(x)^k} \underbrace{[(x-1)(x-2) \cdot \dots \cdot (x-n)]}_{h(x)} \cdot e^{-x}.$$

$$f_{n;k}(x) = \underbrace{g(x)^k}_{g(x)^k} \cdot \underbrace{h(x) \cdot e^{-x}}_{h(x) \cdot e^{-x}}$$

Seien G und H die oberen Schranken dieser Teilfunktionen im Intervallbereich der Nullstellen $[0, n]$.

$$|g(x)| \leq G \text{ und } |h(x) \cdot e^{-x}| \leq H$$

$$|f(x)| \leq G^k \cdot H \quad (\text{错误!未找到引用源。})$$

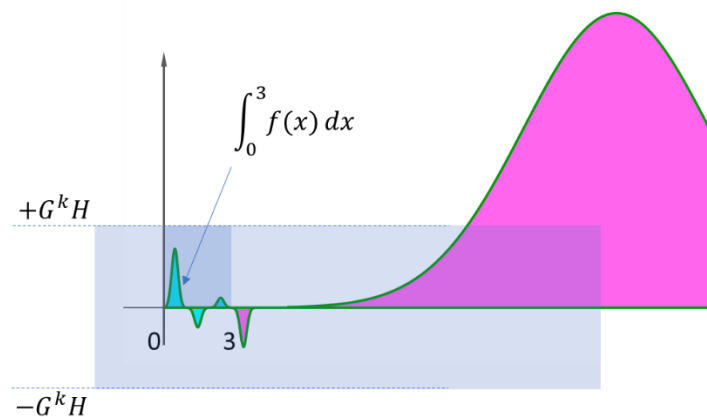


Abb. 3

Dann sind die Integrale $\int_0^j f(x) dx$ betragsmäßig sicher kleiner als das Rechteck mit der Breite j und der Höhe $G^k \cdot H$.

$$\left| \int_0^j f(x) dx \right| \leq G^k H \cdot j \text{ bzw. } \left| \int_0^3 f(x) dx \right| \leq G^k \cdot H \cdot 3 \quad (\text{错误!未找到引用源。})$$

Berücksichtigen wir das für die Abschätzung des Terms P auch unter Verwendung der verallgemeinerte Dreiecksungleichung $|a \pm b \pm c| \leq |a| + |b| + |c|$.

$$\begin{aligned} |P| &= \left| 2e^4 \cdot \int_0^4 - 6e^3 \cdot \int_0^3 + e^2 \cdot \int_0^2 + 3e^1 \cdot \int_0^1 \right| \leq \\ &\leq |2e^4| \cdot \left| \int_0^4 \right| + |6e^3| \cdot \left| \int_0^3 \right| + |e^2| \cdot \left| \int_0^2 \right| + |3e^1| \cdot \left| \int_0^1 \right| \leq \\ &\leq |2e^4 \cdot (G^k H \cdot 4)| + |6e^3 \cdot (G^k H \cdot 3)| + |e^2 \cdot (G^k H \cdot 2)| + |3e^1 \cdot (G^k H \cdot 1)| = \\ &= G^k \cdot H \cdot \underbrace{(|2e^4 \cdot 4| + |6e^3 \cdot 3| + |e^2 \cdot 2| + |3e^1 \cdot 1|)}_{r \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

Von P kann gezeigt werden, dass $P/k!$ durch die Wahl von k betragsmäßig beliebig klein ($\in]-1; 1[$) gemacht werden kann.

$$|P| \leq G^k \cdot H \cdot r : k!$$

$$\frac{|P|}{k!} \leq \frac{G^k \cdot H \cdot r}{k!}$$

Der letzte Schritt ermöglicht es uns, Proposition 1 (siehe Propositionen im Anhang) anzuwenden:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{G^k}{k!} = 0$$

Da k beliebig groß sein kann, ist es möglich, eines so zu wählen, dass

$$\frac{|P|}{k!} < 1$$

Unsere Wahl mit $k = 6$ ist dafür sicher zu klein. Die möglichen Werte für k sind aber nach oben unbeschränkt! Für unsere Polynomgleichung gilt

$$k \geq 17 \Rightarrow \frac{|P|}{k!} < 1.$$

DER TERM Q

Q beinhaltet die Integrale

$$\int_j^\infty = \int_j^\infty f(x) dx.$$

Zuerst den **Fall $j = 0$** , also das Integral

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty x^6 \cdot [(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)]^7 \cdot e^{-x} dx$$

Die Multiplikation der Linearfaktoren ergibt ein ganzzahliges Polynom mit der höchsten Potenz $x^{34} = x^{4 \cdot 7 + 6} = x^{n(k+1)+k}$ und der niedrigsten mit $x^7 = x^{k+1}$.

Multipliziert mit e^{-x} ergibt das eine Summe von Termen der Form „ $x^m e^{-x}$ “, $m \in \mathbb{N}$ (inklusive der zugehörigen Koeffizienten).

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\underbrace{x^{34} e^{-x}}_{\int \dots = 34!} - 70 \underbrace{x^{33} e^{-x}}_{\int \dots = 33!} + 2345 \underbrace{x^{32} e^{-x}}_{\int \dots = 32!} - 50050 \underbrace{x^{31} e^{-x}}_{\int \dots = 31!} + \dots + \frac{4586471424}{4!^7} \underbrace{x^6 e^{-x}}_{\int \dots = 6!} \right) dx \\ = \underbrace{34! - 70 \cdot 33! + \dots \cdot 32! - \dots + 4! \cdot 6!}_{7! \triangleq (k+1)! \text{ herausheben}} = \underbrace{7!}_{(k+1)!} \left(\underbrace{8 \cdot 9 \cdot 10 - \dots}_{c_0 \in \mathbb{Z}} \right) + \frac{4!^7 \cdot 6!}{n!^{k+1, k!}} \\ 34! \triangleq (n(k+1) + k)!, \quad 6! \triangleq k!, \quad 7! \triangleq (k+1)! \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty f_{n;k}(x) dx = \underbrace{(k+1)! \cdot c_0 + n!^{k+1} \cdot k!}_{\in \mathbb{Z}}$$

(Siehe auch Satz 1 im Anhang)

Für die Fälle $j = 1, 2, \dots, n$ (Siehe auch Satz 2 im Anhang) nehmen wir beispielsweise das Integral aus

$$\int_3^\infty := \int_3^\infty f(x) dx$$

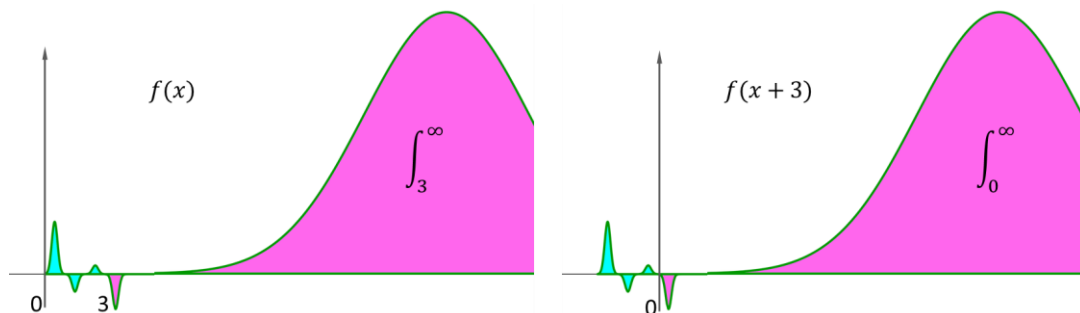


Abb. 4

Verschieben wir dazu den Funktionsgraphen um $j = 3$ nach links, wodurch die untere Integrationsgrenze von $3 \rightarrow 0$ verschoben wird, an der oberen Grenze ∞ ändert sich aber nichts.

$$\begin{aligned} \int_3^\infty f(x) dx &= \int_0^\infty f(x+3) dx = \\ &= \int_0^\infty (x+3)^6 \cdot [(x+2)(x+1)(x)(x-1)]^7 \cdot e^{-x} \cdot e^{-3} dx = \dots \end{aligned}$$

Der Clou an der Sache: Der Term e^{-3} kann herausgehoben werden.

$$= e^{-3} \int_0^\infty (x^{34} + \dots + \sim x^7) \cdot e^{-x} dx = \dots$$

Die Multiplikation der Linearfaktoren ergibt ein ganzzahliges Polynom mit der höchsten Potenz $x^{34} \cong x^{n(k+1)+k}$ und der niedrigsten mit $x^7 \cong x^{k+1}$.

Mit Proposition 2 (siehe Propositionen im Anhang) ergibt sich ein Term mit Fakultäten

$$\begin{aligned} e^{-3} \cdot \int_0^\infty (x^{34} + \dots + \sim x^7) \cdot e^{-x} dx &= e^{-3} \cdot \int_0^\infty (x^{34} \cdot e^{-x} + \dots + \sim x^7 \cdot e^{-x}) dx \\ &= e^{-3} \cdot \left(\underbrace{\int_0^\infty x^{34} \cdot e^{-x} dx}_{34!} + \dots + \sim \underbrace{\int_0^\infty x^7 \cdot e^{-x} dx}_{7!} \right) = \\ &\dots = e^{-3} \cdot (34! + \dots + \sim(7!)) = \dots \end{aligned}$$

Letztlich kann noch $(k+1)! = 7!$ herausgehoben werden:

$$= e^{-3} \cdot 7! \cdot \underbrace{((8 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 34) + \dots + \sim)}_{c_3 \in \mathbb{Z}} = e^{-j} \cdot \underbrace{(k+1)!}_{\in \mathbb{Z}} \cdot \underbrace{c_j}_{\in \mathbb{Z}}$$

Für den in dargestellt Fall $j = 3$ ergibt das Integral

$$\int_3^\infty = e^{-3} \cdot 7! \cdot 145797067010379305292662512107224064$$

ZURÜCK ZU TERM Q:

$$Q = 2e^4 \cdot \left(\int_4^\infty \right) - 6e^3 \cdot \left(\int_3^\infty \right) + e^2 \cdot \left(\int_2^\infty \right) + 3e^1 \cdot \left(\int_1^\infty \right) - 4e^0 \cdot \left(\int_0^\infty \right) =$$

Einsetzen der Teilintegrale

$$\int_j^\infty = e^{-j} \cdot 7! \cdot c_j \quad \text{bzw.} \quad \int_0^\infty = 7! \cdot c_0 + 4!^7 \cdot k!$$

$$Q = 2e^4 \cdot (e^{-4} \cdot 7! \cdot c_4) - 6e^3 \cdot (e^{-3} \cdot 7! \cdot c_3) + \dots - 4(7! \cdot c_0 + 6! \cdot 4!^7)$$

Durch diese Konstellation **neutralisieren sich die e-Potenzen !**

Zusätzlich kann man zumindest $k! = 6! \cdot 7!$ herausheben. ($7! = 6! \cdot 7$)

$$Q = 6! (2 \cdot 7 \cdot c_4 - 6 \cdot 7 \cdot c_3 + 7 \cdot c_2 + 3 \cdot 7 \cdot c_1 - 4 \cdot 7 \cdot c_0 - 4 \cdot 4!^7) \in \mathbb{Z} !!!$$

Allgemein:

$$Q = k! \cdot \underbrace{(a_n(k+1)c_n \pm \dots \pm a_0(k+1)c_0 \pm a_0 n!^{k+1})}_{z \in \mathbb{Z}} = k! \cdot z \in \mathbb{Z}$$

Q und $\frac{Q}{k!}$ sind ganzzahlig!

ZUSAMMENFASSUNG:

Wenn e eine Lösung der Gleichung

$$2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3x - 4 = 0$$

wäre, dann wäre

$$2e^4 - 6e^3 + e^2 + 3e - 4 = 0.$$

Nach Multiplikation mit

$$| \cdot \int_0^\infty f$$

und Aufspaltung der linken Seite der Gleichung in zwei, die Zahl e beinhaltenden Teile P und Q , ergibt das

$$P + Q = 0 \quad | : k!$$

$$\underbrace{P/k!}_{\in]-1;1[} + \underbrace{Q/k!}_{\in \mathbb{Z}} = 0$$

Bei geeignet großer Zahl k ist $\left| \frac{P}{k!} \right| < 1$ und $\frac{Q}{k!}$ eine ganze Zahl. Somit geht sich $= 0$ nicht aus!

Außer: Beide Terme sind Null ($\underbrace{0}_{\in]-1;1[} + \underbrace{0}_{\in \mathbb{Z}} = 0$) ☹

Dieser Fall wird durch zusätzliche Bedingungen für k verhindert.

$$Q/k! = (k+1) \left(\underbrace{a_n c_n \pm \dots \pm a_0 c_0}_{=: C} \right) \pm a_0 n!^{k+1} =$$

$$= (k+1) \cdot C \pm a_0 n!^{k+1} \stackrel{?}{=} 0 \quad (\cong 7 \cdot C - 4 \cdot 4!^7 \stackrel{?}{=} 0)$$

$Q/k!$ kann nur dann zu Null werden, wenn

$$(k+1) \cdot C = \mp a_0 n!^{k+1} \Leftrightarrow \underset{\in \mathbb{Z}}{C} = \frac{\mp a_0 n!^{k+1}}{k+1}$$

Da C ganzzahlig ist, kann dieser Fall nur eintreten, wenn $k+1$ den Wert von $a_0 n!^{k+1}$ teilt.

Wählt man k mit folgenden Voraussetzungen, ist $a_0 n!^{k+1}$ nicht durch $k+1$ teilbar!

- $k > n$
- $k > |a_0|$
- $k+1 \in \mathbb{P}$ prim (es gibt nach oben hin unbegrenzt viele!)

CONCLUSIO

Auf Grund all unserer Überlegungen kann $2e^4 - 6e^3 + e^2 + 3e - 4$ nicht Null sein. Das heißt, die Eulersche Zahl e kann keine Lösung der Gleichung $2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3x - 4 = 0$ sein.

Die gezeigte Vorgangsweise ist vom gewählten Polynom unabhängig. Sie lässt sich somit auf alle Polynome aus $\mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$ mit demselben Resultat übertragen!

Damit ist die Transzendenz der Eulerschen Zahl e bewiesen! ■

DIE TRANSZENDENZ VON π

Die Kreiszahl π und die Eulersche Zahl e sind über die komplexen Zahlen verbunden.

$$e^{i\pi} = -1$$

Der Beweis der Transzendenz von π ähnelt somit dem vorliegenden für e , führt allerdings in den Bereich der komplexen Zahlen \mathbb{C} .

Eine Konsequenz der Transzendenz von π ist die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises nur mit den Hilfsmitteln Linear und Zirkel.

DAS INTEGRAL – EINE EINFÜHRUNG

Falls das Integral noch nicht geläufig ist, hier eine kurze und oberflächliche Einführung, insofern es für das vorliegende Thema nötig ist.

Gegeben ist eine Funktion $f(x)$ und ihr Graph G_f . Das Integral berechnet den Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse. Zu diesem Zweck denkt man sich die zu berechnende Fläche mit schmalen Rechteckstreifen angenähert. Ein Streifen hat an der Stelle x eine Höhe von $f(x)$. Seine Breite wird mit dx bezeichnet.

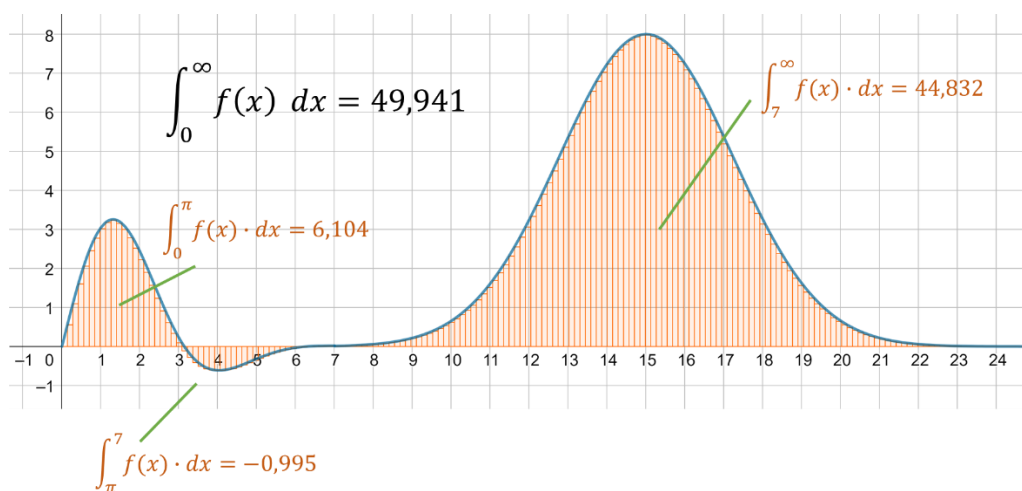


Abb. 5: $\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\pi} f(x) \cdot dx + \int_{\pi}^7 f(x) \cdot dx + \int_7^{\infty} f(x) \cdot dx = 6,104 + (-0,995) + 44,832 = 49,941$

Ein einzelner schmaler Streifen hat somit als Höhe einen Funktionswert $f(x)$ und die Breite dx , somit den Flächeninhalt $f(x) \cdot dx$. Die Gesamtfläche bekommt man durch das Aufsummieren aller Rechteckstreifen.

Das Ergebnis ist umso genauer, je schmäler die Rechteckstreifen sind. Die Anzahl der Streifen steigt damit aber stark an. Für einen Computer ist das aber kein Problem.

Für viele Funktionen gibt es auch analytische Rechenalgorithmen, bei denen von unendlich schmalen und damit auch unendlich vielen Streifen ausgegangen wird und durch eine Grenzwertberechnung das Integral perfekt bestimmt werden kann.

Zusammenfassung: Das Integral berechnet die Summe aller Streifen $f(x) \cdot dx$ von $x = a$ bis $x = b$:

$$\int_a^b f(x) dx$$

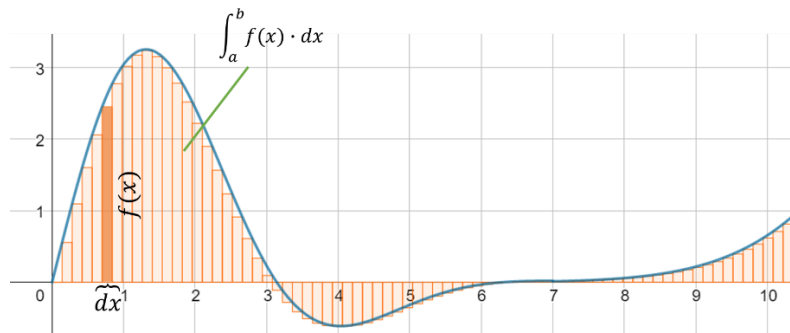


Abb. 6

Zu bemerken wäre noch, dass das Integral im Bereich negativer Funktionswerte auch einen negativen Wert berechnet. Das ist auch richtig so. Der Wert von $\int_0^{10} f(x) dx$ in Abb. 6 ist dadurch geringer als der eingezeichnete Flächeninhalt zwischen 0 und 10.

Nützliche Rechenregeln:

Rechenregel

$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Beispiel

$$\int_1^5 (x^2 + 3x - \sin(x)) dx = \int_1^5 x^2 dx + \int_1^5 3x dx - \int_1^5 \sin(x) dx$$

$$\int_1^5 (8,76 \cdot x^2 \cdot e^{-x}) dx = 8,76 \cdot \int_1^5 (x^2 \cdot e^{-x}) dx$$

Integralrechner

Viele **Taschenrechner** haben die Möglichkeit, Integrale numerisch zu berechnen.

Auch **online** findet man diesbezüglich etliche Programme.

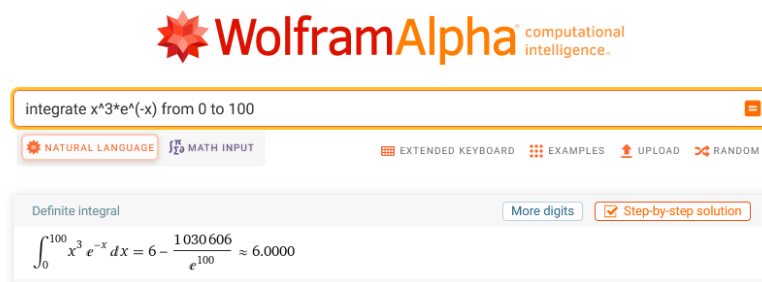


Abb. 7: www.wolframalpha.com

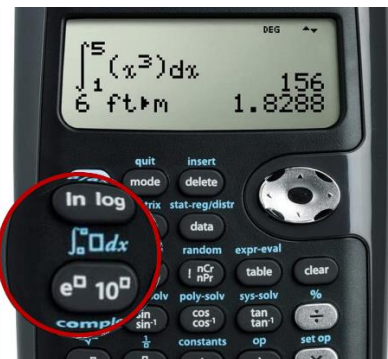


Abb. 8

PROPOSITIONEN

Propositionen sind bekannte Sätze der Mathematik, die für die weiteren Überlegungen benötigt werden.

Proposition 1

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r^k}{k!} = 0, \text{ für alle } r \in \mathbb{R}$$

In ~~错误!未找到引用源。~~ ist dies für einige positive Zahlen r grafisch dargestellt. (Beweis siehe Anhang)

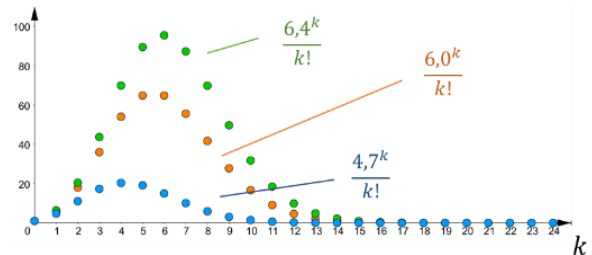


Abb. 9

Proposition 2

Dieser berühmte Satz bildet eine Brücke zwischen der Eulerschen Zahl e und den natürlichen Zahlen.

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-x} dx = m!, \text{ für alle } m \in \mathbb{N}$$

Euler fand diesen Zusammenhang angeblich bei der Arbeit an einem physikalischen Problem. (Beweis siehe Anhang)

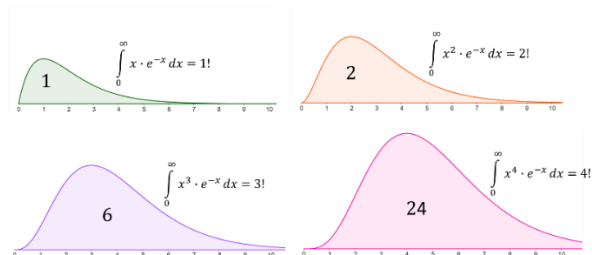


Abb. 10

BEWEIS PROPOSITION 1

Zu zeigen: $\forall r \in \mathbb{R} : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r^k}{k!} = 0, k \in \mathbb{N}$.

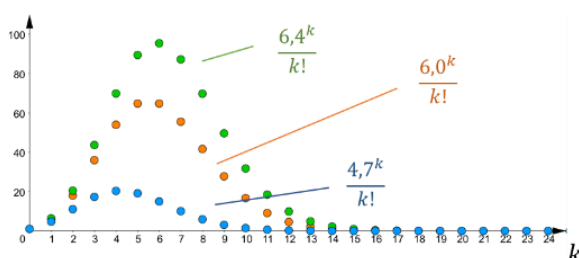
Falls $|r| < 1$ ist dies trivial: $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r^k}{k!} = 0$

Für $|r| = 1$ ist dies ebenfalls trivial: $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1^{k-1}}{k!} = 0$

Für den Fall $|r| > 1$ beschränken wir uns nur auf $r \in \mathbb{R}^+$, da $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{<0}^k}{k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k \cdot |r|^k}{k!} =$

$\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k \cdot \frac{|r|^k}{k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|r|^k}{k!}$, da $(-1)^k$ beschränkt bleibt.

Für den relevanten Fall $r > 1$ sieht man vorerst ein Ansteigen der Werte und danach erst ein Abfallen Richtung Null.



Das liegt daran, dass in der Folge $\langle \frac{r^k}{k!} \rangle$ zuerst der Zähler größer ist als der Nenner. Wird $k > r$, so dreht sich das um. Wir wollen zeigen, dass ab dem Wert $k = K > r$ die Folge gegen Null konvergiert.

In der Teilfolge $\langle \frac{r^{k>K}}{k!} \rangle$ gilt

$$\frac{r^{k>K}}{k!} = \frac{(r \cdot r \cdot \dots \cdot r) \cdot (r \cdot r \cdot \dots \cdot r)}{(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot K) \cdot ((K+1)(K+2) \cdot \dots \cdot k)} = \left(\frac{\overbrace{r \cdot r \cdot r \cdot \dots \cdot r}^{K \text{ Faktoren} \geq 1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot K} \right) \cdot \left(\frac{\overbrace{r \cdot r \cdot r \cdot \dots \cdot r}^{k-K \text{ Faktoren} < 1}}{K+1 \cdot K+2 \cdot \dots \cdot k} \right).$$

Der erste Faktor ist kleiner als $\frac{\overbrace{r \cdot r \cdot \dots \cdot r}^{K \text{ Faktoren}}}{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1} = \left(\frac{r}{1} \right)^K =: R$ und damit beschränkt, im zweiten Faktor bilden die Faktoren dort eine Nullfolge.

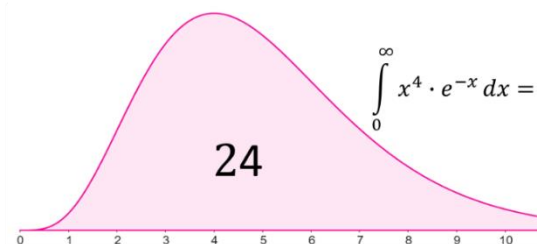
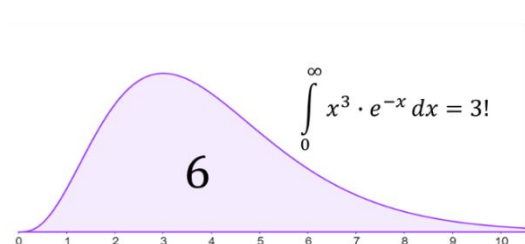
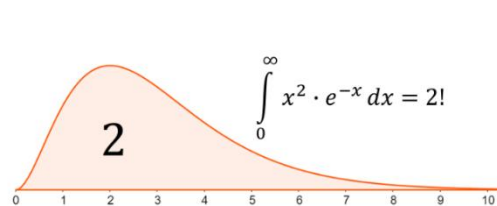
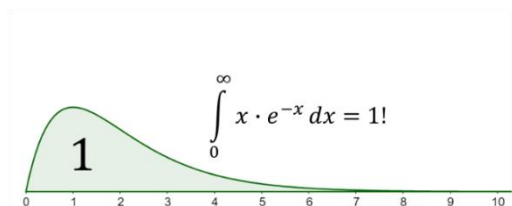
$$\frac{r^{k>r}}{k!} < R \cdot \left(\frac{\overbrace{r \cdot r \cdot r \cdot \dots \cdot r}^{k-K \text{ Faktoren} < 1}}{K+1 \cdot K+2 \cdot \dots \cdot k} \right)$$

Dann ist auch die Folge $\langle R \cdot \frac{r}{K+1}, R \cdot \frac{r^2}{(K+1)(K+2)}, R \cdot \frac{r^3}{(K+1)(K+2)(K+3)}, \dots, R \cdot \frac{r^{k-K}}{(K+1)(K+2)(K+3) \cdot \dots \cdot k} \rangle$ als „Majorante“ eine Nullfolge ab $k = K > r$. ■

BEWEIS PROPOSITION 2

Zu zeigen: $\forall m \in \mathbb{N} : \int_0^\infty x^m e^{-x} dx = m!$

Die Graphen dieser Teilfunktionen $f_m(x) = x^m \cdot e^{-x}$, $m \in \mathbb{N}$ ähneln einander sehr. In der Nähe von $x = 0$ ist $e^{-x} \approx e^0 = 1$, somit dominiert die Potenz x^m . In weiterer Folge dominiert der Term e^{-x} , da e^{-x} stärker fällt als jede Potenzfunktion. $f_m(x)$ nähert sich dabei asymptotisch derart der x-Achse, dass der Flächeninhalt unterhalb des Graphen, obwohl bis ins Unendliche reichend, doch endlich bleibt. (Siehe [fehler!未找到引用源。](#))



Interessant ist, dass diese Fläche einen besonderen ganzzahligen Wert annimmt.

$$\int_0^\infty f_m(x) dx = \int_0^\infty x^m \cdot e^{-x} dx = m!$$

Für den Beweis bedarf es der Methode der partiellen Integration, der „Produktregel“ des Integrierens sozusagen.

$$\begin{aligned}
 \int_a^b g(x) \cdot h'(x) dx &= [g(x) \cdot h(x)]_a^b - \int_a^b g'(x) \cdot h(x) dx = \\
 = \int_0^\infty x^m \cdot e^{-x} dx &= \underbrace{[x^m \cdot (-e^{-x})]_0^\infty}_{(-0)^* - (-0)^{**}} - \int_0^\infty mx^{m-1} \cdot (-e^{-x}) dx \\
 &= \int_0^\infty mx^{m-1} \cdot e^{-x} dx = \\
 = m \cdot \int_0^\infty x^{m-1} \cdot e^{-x} dx &= \text{wie zuvor} \dots = m \cdot \int_0^\infty (m-1) \cdot x^{m-2} \cdot e^{-x} dx = \\
 = m \cdot (m-1) \cdot \int_0^\infty x^{m-2} \cdot e^{-x} dx &= \dots \\
 &= m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 1 \cdot \int_0^\infty x^0 \cdot e^{-x} dx = \\
 = m! \cdot \int_0^\infty e^{-x} dx &= m! \cdot \underbrace{[-e^{-x}]_0^\infty}_{-0 - (-1)} = m! \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

* $\lim_{x \rightarrow \infty} x^m e^{-x} = 0$ und
 ** $0^m \cdot (-e^{-0}) = 0 \cdot 1$

SATZ 1

$\int_0^\infty f(x) dx$ ist stets eine ganze Zahl, berechnet aus einer Summe an Fakultäten ganzer Zahlen.

$$\int_0^\infty f_{n;k}(x) dx = \underbrace{(nk + n + k)! \pm \dots \pm (n)!^{k+1} \cdot k!}_{(n(k+1)+k)! \dots \text{abfallend} \dots k!} = (k+1)! \cdot c_0 \pm k! \cdot n!^{k+1}; c_0 \in \mathbb{Z}$$

n ist dabei der größte Exponent im Polynom (der Grad des Polynoms) und k die noch näher zu diskutierender ganzer Zahl.

BEWEIS

Die Multiplikation der Linearfaktoren ergibt ein ganzzahliges Polynom mit der höchsten Potenz

$$x^{34} = x^{4 \cdot 7 + 6} = x^{n(k+1)+k} \text{ und der niedrigsten mit } x^7 = x^{k+1}.$$

Multipliziert mit e^{-x} ergibt das eine Summe von Termen der Form „ $x^m e^{-x}$ “, $m \in \mathbb{N}$ (inklusive der zugehörigen Koeffizienten).

Nach **PROPOSITION 2** gilt

$$\int_0^\infty x^m \cdot e^{-x} dx = m!$$

Für $n = 4$ und $k = 6$ ergibt das

$$\int_0^\infty \left(\underbrace{x^{34} e^{-x}}_{\int \dots = 34!} - 70 \underbrace{x^{33} e^{-x}}_{\int \dots = 33!} + 2345 \underbrace{x^{32} e^{-x}}_{\int \dots = 32!} - 50050 \underbrace{x^{31} e^{-x}}_{\int \dots = 31!} + \dots + \underbrace{4586471424}_{4!^7} \underbrace{x^6 e^{-x}}_{\int \dots = 6!} \right) =$$

$$= \underbrace{34! - 70 \cdot 33! + \dots \cdot 32! - \dots + 4! \cdot 6!}_{7! \cong (k+1)! \text{ herausheben}} = \underbrace{7!}_{(k+1)!} \left(\underbrace{8 \cdot 9 \cdot 10 - \dots}_{c_0 \in \mathbb{Z}} \right) + \underbrace{4!^7 \cdot 6!}_{n!^{k+1} \cdot k!}$$

$$34! \cong (n(k+1) + k)!, \quad 6! \cong k!, \quad 7! \cong (k+1)!$$

$$\int_0^\infty f_{n;k}(x) dx = \underbrace{(k+1)! \cdot c_0 + n!^{k+1} \cdot k!}_{\in \mathbb{Z}} \quad \blacksquare$$

SATZ 2

Sei j eine Nullstelle von $f_{n,k}$, so gilt

$$\int_j^\infty f(x) dx = e^{-j} \cdot (k+1)! \cdot \underbrace{c_j}_{\in \mathbb{Z}}$$

BEWEIS

Verschieben wir dazu den Funktionsgraphen um $j = 3$ nach links, was einer Substitution $x \rightarrow x + 3$ gleichkommt. Dadurch wird die untere Integrationsgrenze von $3 \rightarrow 0$ verschoben, an der oberen Grenze ∞ ändert sich nichts.

$$\begin{aligned} \int_3^\infty f(x) dx &= \int_0^\infty f(x+3) dx = \\ &= \int_0^\infty (x+3)^6 \cdot [(x+2)(x+1)(x)(x-1)]^7 \cdot e^{-x} \cdot e^{-3} dx \end{aligned}$$

Der Clou an der Sache: Der Term e^{-3} kann herausgehoben werden.

$$\int_3^\infty f(x) dx = e^{-3} \cdot \int_0^\infty \underbrace{\frac{(x+3)^6}{x^6 + \dots + 3^6} \cdot \left[\frac{(x+2)(x+1)(x)(x-1)}{x^4 + \dots + \sim x} \right]^7}_{x^{34} + \dots + 3^6 \cdot \sim x^7} \cdot e^{-x} dx$$

Dabei steht wieder die Tilde (\sim) für jene **ganze Zahl**, die sich an dieser Stelle durch die Rechnung ergibt, deren Wert aber nicht wichtig ist. Manche $+$ mögen besser durch \pm ersetzt werden, das ändert aber nichts an den Schlussfolgerungen.

Die Multiplikation der Linearfaktoren ergibt ein ganzzahliges Polynom mit der höchsten Potenz $x^{34} \hat{=} x^{n(k+1)+k}$ und der niedrigsten mit $x^7 \hat{=} x^{k+1}$.

$$\begin{aligned} \int_3^\infty f(x) dx &= e^{-3} \cdot \int_0^\infty (x^{34} + \dots + \sim x^7) \cdot e^{-x} dx \\ &= e^{-3} \cdot \left(\underbrace{\int_0^\infty x^{34} \cdot e^{-x} dx}_{34!} + \underbrace{\sim \cdot \int_0^\infty \dots}_{\sim(\sim)!} + \underbrace{\int_0^\infty x^7 \cdot e^{-x} dx}_{7!} \right) = \\ &= e^{-3} \cdot (34! + \dots + \sim(7!)) = \end{aligned}$$

Letztlich kann noch $(k+1)! = 7!$ herausgehoben werden:

$$= e^{-3} \cdot 7! \cdot \underbrace{((8 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 34) + \dots + \sim)}_{c_3 \in \mathbb{Z}}$$

Allgemein:

$$\int_j^\infty f(x) dx = e^{-j} \cdot (k+1)! \cdot \underbrace{c_j}_{\in \mathbb{Z}} \quad \blacksquare$$