√2 irrational

Top 10: Platz 8

UHLMAN

Inhalt

Einleitung

Die irrationalen Zahlen kamen mit dem Pythagoräischen Lehrsatz in die Welt der Mathematik. Davor war die Vorstellung vorherrschend, alles mit Hilfe der natürlichen Zahlen und ihren Teilen zu beschreiben. Immerhin liegen zwischen zwei natürlichen Zahlen unendlich viele rationale Zahlen. Diese Bruchzahlen füllen, dicht an dicht liegend, den Raum zwischen den natürlichen Zahlen auf. Weitere Zahlen haben da keinen Platz mehr. Immerhin liegen zwischen zwei beliebig nahen beieinander liegenden Bruchzahlen erneut unendlich viele.

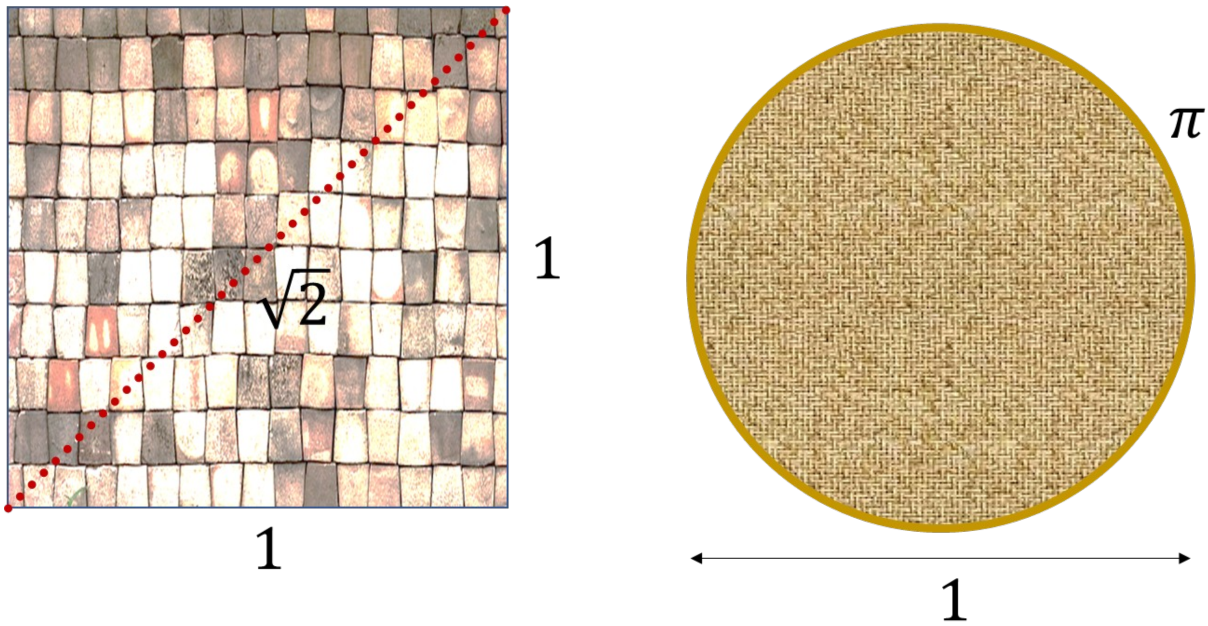

Abb. 1

Für die Diagonale bzw. den Kreisumfang (Abb. 1) wurden etliche rationale Werte überlegt. Letztendlich musste man eingestehen, dass dies nicht möglich ist.

Ein leicht verständlicher Widerspruchsbeweis findet man bereits bei Euklid.

Beweis der Irrationalität von √2

Beweis nach Euklid

Präpositionen:

Gerade natürliche Zahlen haben gerade Quadratzahlen und umgekehrt!

$n^2 \in N_g \quad n \in N_g$

Ungerade natürliche Zahlen haben ungerade Quadratzahlen und umgekehrt!

$n^2 \in N_u \quad n \in N_u$

Übereinkunft: $N = \{1,2,3\ldots\}$ ohne die Null.

Der Beweis

Nehmen wir an, $\sqrt{2}$ ließe sich als Bruch darstellen. Dabei lässt sich jeder Bruch soweit kürzen, bis Zähler und Nenner teilerfremd sind. Jeder Bruch lässt sich durch Kürzen auf so einen Basisbruch reduzieren!

$$\sqrt{2} = \frac{A}{B} \overset{Kürzen}{=} ¿ \frac{a}{b} (ggT(a,b) = 1)$$

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \, bedeutet \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \frac{a^2}{b^2} = 2a^2 = 2 \cdot b^2$$

a^2ist ein Vielfaches von 2. a^2 ist daher gerade und somit auch a!

Wenn a gerade, dann ist es selbst ein Vielfaches von 2 $\rightarrow a = 2 \cdot m, m \in N$

Eingesetzt für a ergibt dies

$$a^2 = (2m)^2 = 2 \cdot b^2 4m^2 = 2b^2 2m^2 = b^2$$

b^2ist ein Vielfaches von 2. b^2 ist daher gerade und somit auch b!

Conclusio

Der Basisbruch müsste, obwohl schon maximal gekürzt, nach wie vor durch 2 teilbar sein.

Einen Bruch, der immer wieder - unendlich oft - durch 2 teilbar bleibt, gibt es nicht!!!

Aus diesem Grund widerspricht $\sqrt{2}$ der Darstellung als Bruchzahl. ■