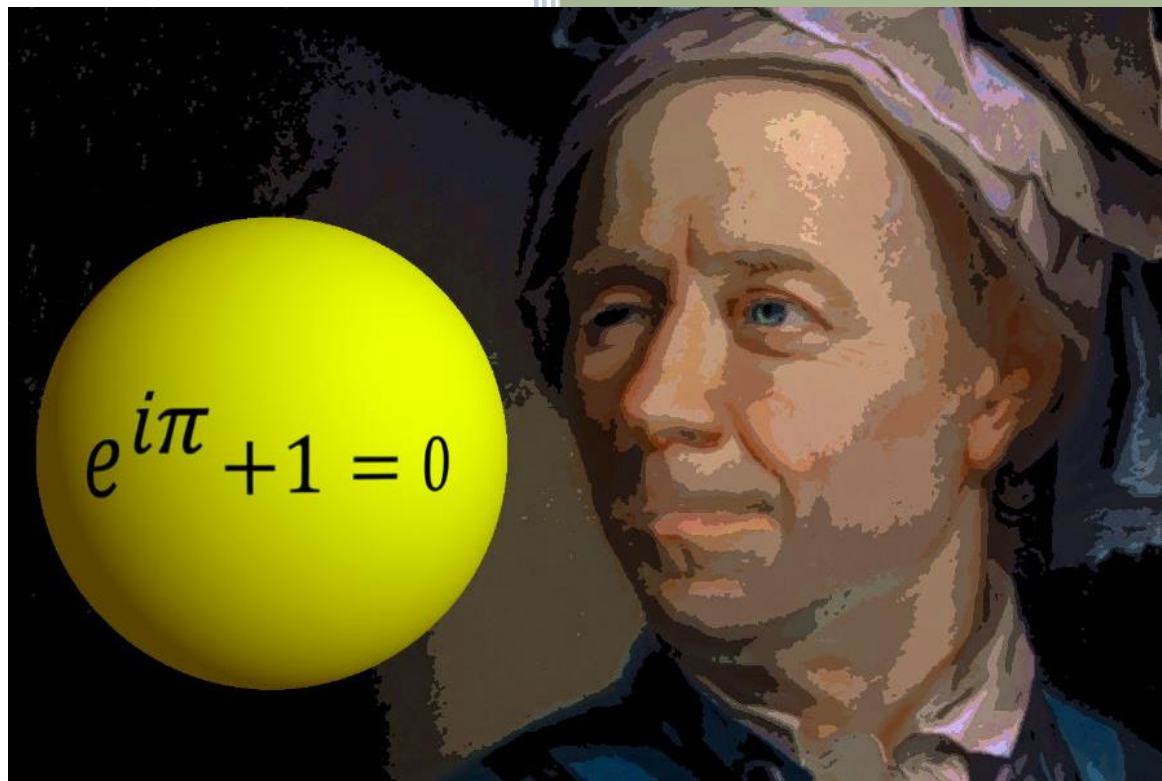


Eulersche Identität

Top Ten: Platz 1



1 INHALT

2	Five in One	2
2.1	Die Null	2
2.2	Die Eins	2
2.3	Pi (π)	3
2.4	Die imaginäre Einheit	3
2.5	Die Eulersche Zahl e	3
3	Der Beweis	4
3.1	Reihenentwicklung für $f(x) = \sin(x)$	4
3.2	Reihenentwicklung für $f(x) = \cos(x)$	4
3.3	Reihenentwicklung für $f(x) = e^x$	5
3.4	Eulersche Formel	5
3.5	Eulersche Identität	5

2 FIVE IN ONE

Die von Leonhard Euler entdeckte und nach ihm benannten Identität verbindet fünf der elementarsten Zahlen in der Mathematik in einer Gleichung!

Damit belegt die Eulersche Identität Platz 1 in „Die Top Ten der schönsten mathematischen Sätze“.

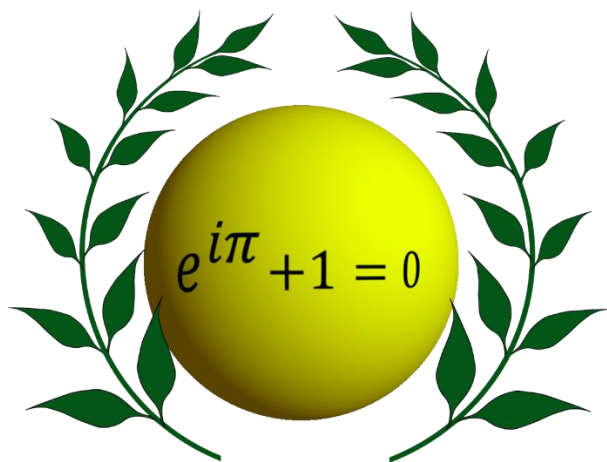


Abb. 1: Sieger in der Rubrik „Top Ten der schönsten mathematischen Sätze“!

2.1 DIE NULL

- Die Null ist das neutrale Element der Addition in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
- Die Null ist das absorbierende Element der Multiplikation.
Eine Null als Faktor macht alles zunichte.
- „Durch Null darf man nicht dividieren!“
Man darf! Nur kommt nichts Eindeutiges dabei heraus. Die Null hat bezüglich der Multiplikation keine Inverse!
- Die Null ist das Zeichen einer Leerstelle im Stellenwertsystem und aus einem Punkt heraus entstanden: $5T\ 1Z2E = 5 \cdot 12 = 5 \circ 12 = 5 \circ 12 = 5012$
- Die deutsche Bezeichnung stammt vom lateinischen Wort *nullus* (= keiner) bzw. altitalienisch *nulla figura* (= keine Ziffer).

2.2 DIE EINS

- Die Eins ist das neutrale Element der Multiplikation in $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
- Die Eins ist definierter Nachfolger von Null in \mathbb{N} . Erst dadurch entstehen axiomatisch die natürlichen Zahlen.

- Die Eins als Zeichen symbolisiert einen Strich. ~~###~~ *///*
- Die Eins mit negativem Vorzeichen erweitert die natürlichen Zahlen um die ganzen Zahlen.

2.3 π (π)

- π ist der Umfang des Kreises mit Durchmesser 1.
- π ist der Flächeninhalt des Kreises mit Radius 1.
- π ist der 16. Buchstabe des griechischen Alphabets und als Kreiszahl die Zahl des Krummen.
- π ist der Anfangsbuchstabe des griechischen Wortes περιφέρεια (Umfang, Peripherie)
- π ist irrational und transzendent, kann also nicht als Division ganzer Zahlen und auch nicht über ein endliches ganzzahliges Polynom definiert werden.
- π ist der Grenzwert der Reihe $\frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} \pm \dots = \pi$
- π ist in seiner Dezimaldarstellung 3,1415926535 ... seit dem 14. August 2021 mit rund 62,8 Billionen Nachkommastellen bekannt.

2.4 DIE IMAGINÄRE EINHEIT

- i ist durch die Gleichung $i^2 = -1$ definiert und bedeutet dadurch etwas ungenau $\sqrt{-1}$.
- i hat keine Entsprechung auf der reellen Zahlenachse. i ist die Einheit auf der Achse der imaginären Zahlen. $0 \cdot i = 0 \cdot 1 = 0$ ist die einzige sowohl reelle, als auch imaginäre Zahl.
- i als Symbol wurde von Leonhard Euler 1777 zu ersten Mal verwendet.
- i ist zentraler Bestandteil unserer Welt. Die grundlegende Gleichung der Quantenmechanik beschreibt die zeitliche und räumliche Veränderung eines nichtrelativistischen quantenmechanischen Zustands in Form der partiellen Differentialgleichung: $i \cdot \hbar \cdot \dot{\psi} = \hat{H}\psi$

2.5 DIE EULERSCHE ZAHL e

- e ist Basis der natürlichen Exponentialfunktion e^x . Sie ist die einzige nichttriviale Funktion, deren Änderungsrate an jeder Stelle dem Funktionswert an dieser entspricht.
- e ist irrational und transzendent, kann also nicht als Division ganzer Zahlen und auch nicht über ein endliches ganzzahliges Polynom definiert werden.
- e ist der Grenzwert der Reihe $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots = e$
- e als Symbol wurde von Leonhard Euler mehrfach verwendet und nicht in Anspielung an seinen Namen gedacht.
- e in Dezimaldarstellung: 2,7182818284 ...

3 DER BEWEIS

Die Reihenentwicklungen von der Sinus-, Cosinus-, und der (natürlichen) Exponentialfunktion e^x sind einander sehr ähnlich.

3.1 REIHENENTWICKLUNG FÜR $f(x) = \sin(x)$

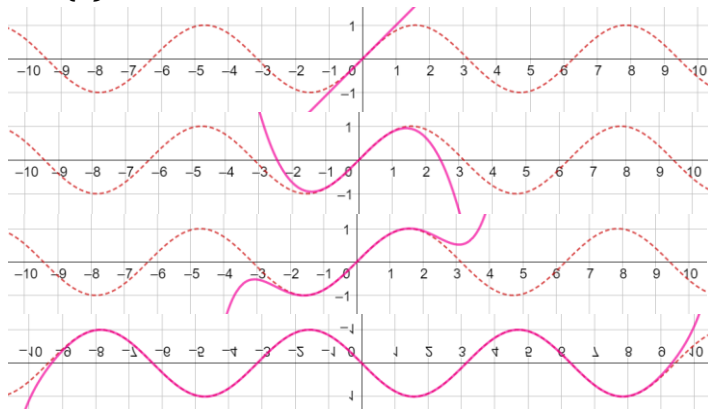
$$\sin(x) \approx \frac{x^1}{1!} = x$$

$$\sin(x) \approx \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!}$$

$$\sin(x) \approx \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$\sin(x) \approx \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots - \frac{x^{23}}{23!}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$



3.2 REIHENENTWICKLUNG FÜR $f(x) = \cos(x)$

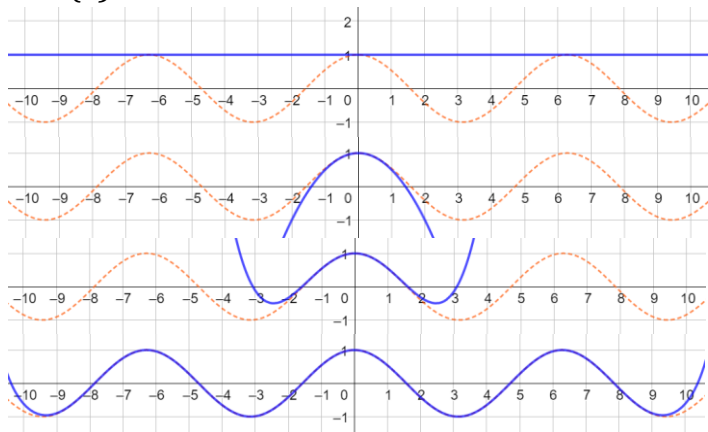
$$\cos(x) \approx \frac{x^0}{0!} = 1$$

$$\cos(x) \approx \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!}$$

$$\cos(x) \approx \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$\cos(x) \approx \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots - \frac{x^{24}}{24!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$



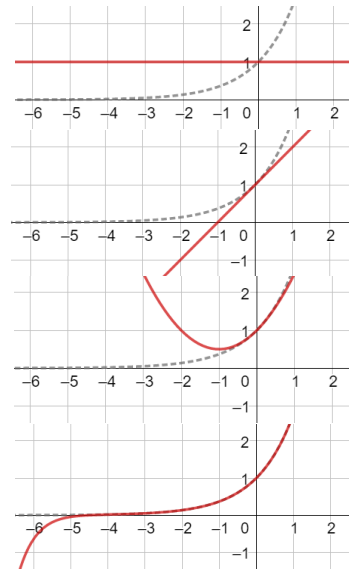
3.3 REIHENENTWICKLUNG FÜR $f(x) = e^x$

$$e^x \approx \frac{x^0}{0!} = 1$$

$$e^x \approx \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!}$$

$$e^x \approx \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!}$$

$$e^x \approx \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{13}}{13!}$$



$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

3.4 EULERSCHE FORMEL

Die Eulersche Formel erweitert die natürliche Exponentialfunktion auf imaginäre Zahlen:

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \frac{i^0 y^0}{0!} + \frac{i^1 y^1}{1!} + \frac{i^2 y^2}{2!} + \frac{i^3 y^3}{3!} + \frac{i^4 y^4}{4!} + \frac{i^5 y^5}{5!} \dots$$

Mit

$$i = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \dots$$

ergibt das

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \frac{y^0}{0!} + i \frac{y^1}{1!} - \frac{y^2}{2!} - i \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i \frac{y^5}{5!} - \dots = \\ &= \left[\frac{y^0}{0!} - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots \right] + i \cdot \left[\frac{y^1}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots \right] = \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{y^{2n}}{(2n)!}}_{\cos(y)} + i \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\sin(y)} \end{aligned}$$

und somit die „Eulersche Formel“

$$e^{iy} = \cos(y) + i \cdot \sin(y), \quad y \in \mathbb{R}$$

3.5 EULERSCHE IDENTITÄT

Aus der Eulerschen Formel ergibt sich sofort mit $y = \pi$ die Eulersche Identität

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1 + i \cdot 0 = -1.$$

$$e^{i\pi} = -1 \text{ oder } e^{i\pi} + 1 = 0$$

