



EXPOSEE

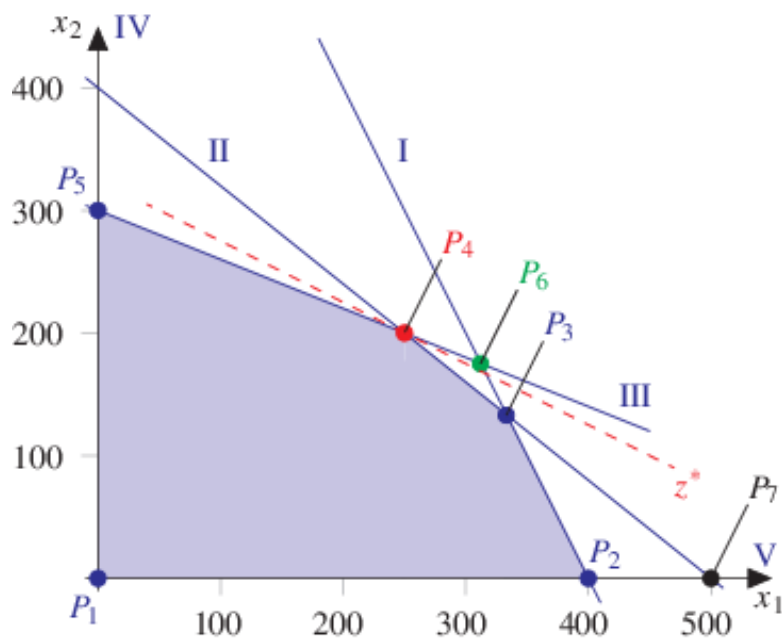
Lineare Optimierung ist eine mathematische Technik, die Entscheidungen über den effizientesten Einsatz begrenzter Ressourcen zu bestimmen.

Uhlmann Rudolf

Inhaltsverzeichnis

Einleitung.....	3
Produktionsplanung der Firma SchokoLeb	3
Zielfunktion und Nebenbedingungen (Lineares Programm LP)	5
Formulierung des linearen Optimierungsproblems	5
Beispiel: Barkeeper.....	6
Lineare Optimierung als geometrisches Problem	7
Aufgabe: Krämerladen.....	8
Aufgabe: Kaffee	9
Minimum-Problem	10
Lineares Programm (LP) – Lösung durch Berechnung.....	11
Beispiel Barkeeper.....	13
Das Simplex-Verfahren.....	13
Aufgabe: Medikament.....	15

Lineare Optimierung





Einleitung

(Aus „Produktionsplanung und Lineare Optimierung, Horst W. Hamacher“, abgerufen 2004)

Produktionsplanung der Firma SchokoLeb

Das Wochenende ist vorbei und für die meisten Menschen beginnt ein arbeitsreicher Montagmorgen. So ist es auch im Büro des Clever-Consulting Teams. Sebastian installiert neue Programme auf seinem Computer. Nadine ordnet ihren Schreibtisch neu. Selina ärgert sich laut schimpfend über die aktuellen Börsenkurse. Und Oliver reht sich noch den Schlaf aus den Augen und erzählt von einer Party am Samstag.

Oliver: Ihr wisst, dass ich so etwas eigentlich nicht mag — Partys, auf denen man Geschäftskontakte knüpfen soll. Aber am Samstag hat es ausnahmsweise Spaß gemacht. Ich habe da eine alte Freundin getroffen, die ich seit Urzeiten ...

Nadine: Entschuldigung, Oliver! Kannst du uns bitte mit deinen Frauengeschichten verschonen. Du weißt, dass wir die Einladung beim Oberbürgermeister mit viel Mühe bekommen haben, weil wir die Hoffnung hatten ein paar neue Geschäftsverbindungen zu knüpfen.

Oliver: Ja. nun warte doch mal ab! Also diese alte Freundin hat mich mit einem Herrn Ritter bekannt gemacht, der irgendwie sehr deprimiert aussah. Es stellte sich heraus, dass er Produktionsplaner bei der Firma *SchokoLeb* ist, die Kakaoprodukte herstellt. Diesem Unternehmen scheint es in der letzten Zeit nicht mehr so richtig gut zu gehen und deshalb soll die ganze Produktion umgestellt werden. Nachdem eine Marktanalyse gemacht wurde, möchte die Firma einige ihrer Produkte zurückfahren, andere in erhöhtem Umfang herstellen und manche völlig neu einführen. Er hat nun die undankbare Aufgabe bekommen, einen Plan zu machen, um wie viel genau die Herstellung der einzelnen Produkte erhöht oder erniedrigt werden soll, so dass der Gewinn möglichst groß ist. Er sprach die ganze Zeit davon alles hinschmeißen zu wollen, weil alles viel zu kompliziert wäre und kein Mensch mehr die Zusammenhänge richtig verstehen könne. Bevor er sich dann aber endgültig seinen depressiven Gedanken hingeben konnte, ist es mir noch gelungen, seine Telefonnummer herauszubekommen. Was meint ihr, wäre das etwas für unsere *Clever Consulting* Gruppe?

Thomas: Ach, ich weiß nicht, hat der Mann denn Geld, um unsere Beratung zu bezahlen?

Sebastian: Mensch Thomas, lass uns doch erst einmal darüber nachdenken, ob da ein Problem drinsteckt, dass uns evt. interessiert und bei dem wir mit unseren Methoden und Erfahrungen etwas ausrichten können.

Nadine: Klingt in der Tat vielversprechend! Da sollten wir nicht vorschnell aufgeben!

Oliver: Wisst ihr was? Ich rufe ihn an und frage nach, ob er mit uns einen Termin machen will. Es lohnt sich bestimmt, ein paar Stunden zu investieren.

Drei Telefongespräche später hat Oliver erfolgreich einen Termin mit der Finnenleitung der Firma SchokoLeb in der kommenden Woche vereinbart. Die Clever Consulting Gruppe beschließt, dass Oliver, Nadine und Sebastian gemeinsam zu diesem Termin gehen. Danach könne man immer noch entscheiden, ob man sich in diesem Projekt engagieren soll oder nicht. Eine Woche später liegt ein internes Protokoll vor, das Nadine gemeinsam mit Sebastian von dem Gesprächstermin verfasst hat.

Oliver: Jetzt kann ich verstehen, warum der gute Herr Ritter an dem Abend so deprimiert war. Kapiert einer von euch, worum es bei der Sache eigentlich geht?

Nadine: Ich habe mir beim Schreiben des Protokolls mit Sebastian schon Gedanken gemacht. Das ganze Problem ist unglaublich kompliziert. Obwohl nur 10 Kakaoprodukte betrachtet werden, gibt es unüberschaubar viele Möglichkeiten, die Produktionspalette von *SchokoLeb* zu ändern. Ich glaube aber, dass wir das Ganze mit Hilfe einer Methode angehen können, die Lineare Optimierung heißt.

Thomas: Jedenfalls sollten wir uns von *SchokoLeb* einen Vertrag für die kleine Vorstudie geben lassen. Da kommt wenigstens etwas Geld in unsere Kassen, während wir nachdenken.

Sebastian: Nee, vergiss das! Wir haben schon ein paar Mal nachgefragt und das war — zumindest Frau Sorrati und Herrn Werkstoll — schon zu viel. Die wollen von uns wissen, ob wir mit relativ wenig Aufwand von ihrer Seite etwas herausbekommen, was ihnen nützt.

Nadine: Ich finde, wir sollten erst ein kleines Beispiel mit weniger Daten betrachten. Am besten eines mit zwei Produkten und drei Produktionsanlagen.

Oliver: Ok. Ich schlage vor, dass wir unser gesammeltes Wissen hervorkramen, das wir in diesem Bereich haben. Danach bearbeiten wir das kleinere Beispiel und schauen uns an, wie man das löst. Dann überprüfen wir, ob wir die Methode so richtig verstanden haben und machen uns an das Beispiel von Frau Sorrati.

Nadine: Das ist, finde ich, eine gute Idee. Wir sollten die Aufgaben verteilen und alles aufschreiben, was wir herausfinden. Für das Exposé können wir dann immer noch auswählen, was wir an die Firma *SchokoLeb* weitergeben. Und ich schreibe aus meinen Uni-Unterlagen heraus, was ich über Lineare Optimierung finde und was man dazu so aus der Mathematik braucht.

Thomas: Ich mache mich an das kleine Beispiel.

Sebastian: Ich suche im Internet, was ich da finde. Vielleicht können wir — zumindest für die Vorstudie — Software benutzen, die frei verfügbar ist.

Oliver: Ich finde, das ist ein guter Plan. Ich werde euch allen als Gesprächspartner zur Verfügung stehen und dann das endgültige Exposé anfertigen.

Zielfunktion und Nebenbedingungen (Lineares Programm LP)

Kapazitäts- und Gewinninformation (Firma SchokoLeb)

Alle Angaben verstehen sich pro Mengeneinheit (ME).

	Kakao	Schokolade	Kapazität (max)
Gewinn	30 €	50 €	
Anlage 1	3 h	2 h	18 h
Anlage 2	1 h	0 h	4 h
Anlage 3	0 h	2 h	12 h

Aufgabenstellung:

Wie viel Kakao und wie viel Schokolade sollen produziert werden, um maximalen Gewinn zu machen?

Zielfunktion (ZF): Gewinn
Nebenbedingung (NB): Kapazitäten

x_1 ... Anzahl der ME Kakao

x_2 ... Anzahl der ME Schokolade

Beispiel: 5 ME Kakao und 3 ME Schokolade $\rightarrow (x_1|x_2) = (5|3)$

Gewinn $G(5,3) = 30 \cdot 5 + 50 \cdot 3 = 300$ (€)

Überprüfung der Nebenbedingungen:

Anlage 1: $3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 21 > 18$ (h)! NB verletzt!

Anlage 2: $1 \cdot 5 + 0 \cdot 3 = 5 > 4$ (h)! NB verletzt!

Anlage 3: $0 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 6 < 12$ (h) NB erfüllt!

Beispiel: $(x_1|x_2) = (4|3)$

Gewinn $G(4,3) = 30 \cdot 4 + 50 \cdot 3 = 270$ (€)

Überprüfe die Nebenbedingungen!

Formulierung des linearen Optimierungsproblems

„LINEARES PROGRAMM (LP)“	
„Zielfunktion“	max $30x_1 + 50x_2$
„unter den Nebenbedingungen“	udN $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ $1x_1 + 0x_2 \leq 4$ $0x_1 + 2x_2 \leq 12$
„Nichtnegativitätsbedingung“	$x_1, x_2 \geq 0$

Beispiel: Barkeeper



COCKTAILS

- Daiquiri (45 ml weißer Rum, 30 ml Cointreau, 30 ml Zitronensaft, 15 ml Zuckersirup, Eis), 5.50€
- Kamikaze (30 ml Wodka, 30 ml Cointreau, 30 ml Zitronensaft, 1 Schuss Limonensirup, Eis), 4.50€
- Long Island Ice Tea (20 ml Wodka, 20 ml weißer Rum, 20 ml Gin, 20 ml Cointreau, 4 TL Zitronensaft, 4 TL Orangensaft, 1/8 l Cola, 1 Orangenscheibe, Eis), 7.00€

Vorhandene Spirituosen: 5 l weißer Rum, 6 l Cointreau, 4 l Wodka und 3 l Gin

Aufgabenstellung:

Welche Cocktails muss der Barkeeper mixen, um möglichst viel Geld einzunehmen? Formuliere das Problem als LP!

Lösung:

Variable:

x_1 : Anzahl Daiquiris

x_2 : Anzahl Kamikazes

x_3 : Anzahl Long Island Ice Teas

Zielfunktion: Maximiere die Einnahmen:

$$\max \quad 5.50x_1 + 4.50x_2 + 7.00x_3$$

Nebenbedingungen:

Weißer Rum: $45x_1 + 20x_3 \leq 5000$

Cointreau: $30x_1 + 30x_2 + 20x_3 \leq 6000$

Gin: $20x_3 \leq 3000$

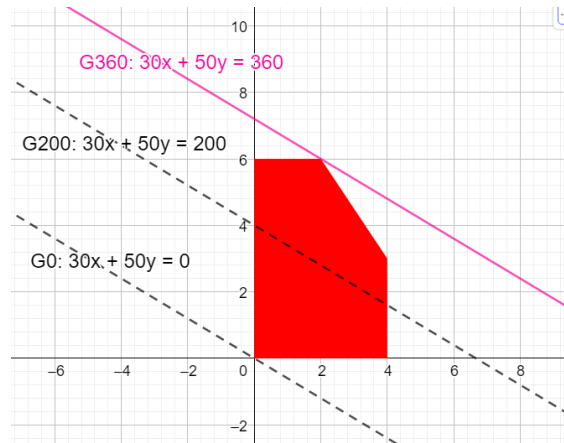
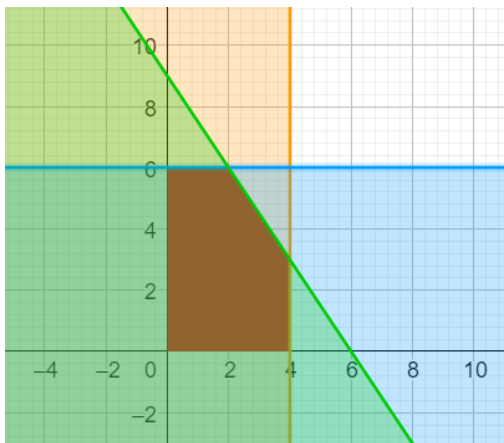
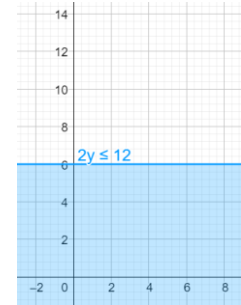
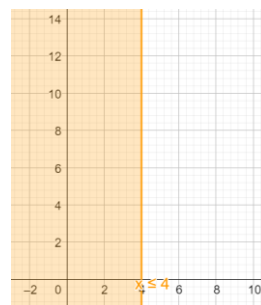
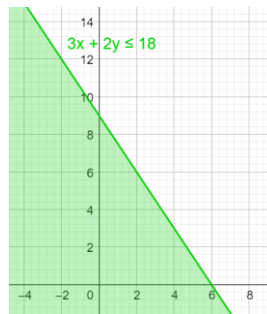
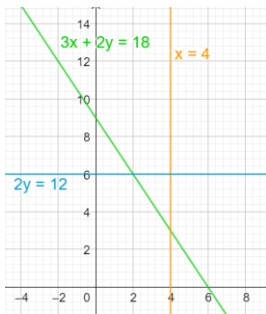
Wodka: $30x_2 + 20x_3 \leq 4000$

Lineare Optimierung als geometrisches Problem

Das Problem beinhaltet nur zwei Produkte (Entscheidungsvariable) und besteht nur aus linearen Termen, ist also 2dimensional und linear.

$$\begin{array}{ll}\max & 30x_1 + 50x_2 \\ & \text{udN} \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & 1x_1 + 0x_2 \leq 4 \\ & 0x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Wir stellen die Nebenbedingungen graphisch dar (z.B. in GeoGebra) und erhalten als Durchschnittsmenge den gültigen Zulässigkeitsbereich, in welchem wir das Gewinnmaximum suchen.



Die Zielfunktion $G(x_1, x_2) = 30x_1 + 20x_2$ kann für verschiedene Gewinnerwartungen eingezeichnet werden (z.B. $G = 0$). Ein Verändern des Gewinns entspricht einer Parallelverschiebung. Als Punkt des Zulässigkeitsbereichs mit höchstmöglichem Gewinn ergibt sich hier der Punkt (2|6), also 2 ME Kakao und 6 ME Schokolade. Der zu erwartende maximale Gewinn beträgt dabei 360€.

Hauptsatz der Linearen Optimierung

Wenn das LP eine optimale Lösung besitzt, dann gibt es immer einen Eckpunkt des Zulässigkeitsbereiches, der optimal ist.

Zusatzaufgabe: Der Gewinn pro ME Kakao ist drastisch von 30€ auf 150€ gestiegen.

Aufgabe: Krämerladen

(Aus „Produktionsplanung und Lineare Optimierung, Horst W. Hamacher“, abgerufen 2004)

Der Krämerladen „Willi & Sohn“ verkauft verschiedene Werkzeuge. Da Willi mit seinem Sohn nächstes Jahr in Urlaub fahren will, ergänzt er sein Sortiment um einen neuen Spezialschraubendreher und eine weitere Sorte Hämmer. Er hofft, dass damit seine Urlaubskasse etwas aufgebessert wird. Pro Schraubendreher verdient Willi nämlich 4 Euro und pro Hammer 2 Euro.

Willis neuer Lieferant stellt jedoch folgende Bedingung: „An einem Schraubendreher verdiene ich 6 Euro, an einem Hammer nur 1 Euro. Ich beliebere dich nur, wenn ich pro Woche mindestens 6 Euro verdiene.“ Außerdem will Willi pro Woche zusammen höchstens 5 Werkzeuge bestellen, da er noch nicht weiß, wie gut sich die Werkzeuge verkaufen. Er ist sich allerdings sicher, dass er nicht mehr als 4 Hämmer und nicht mehr als 4 Schraubendreher verkaufen kann.

Wie viele Schraubendreher bzw. Hämmer soll Willi pro Woche bestellen? Stelle zunächst ein LP auf und löse dann graphisch.

LP

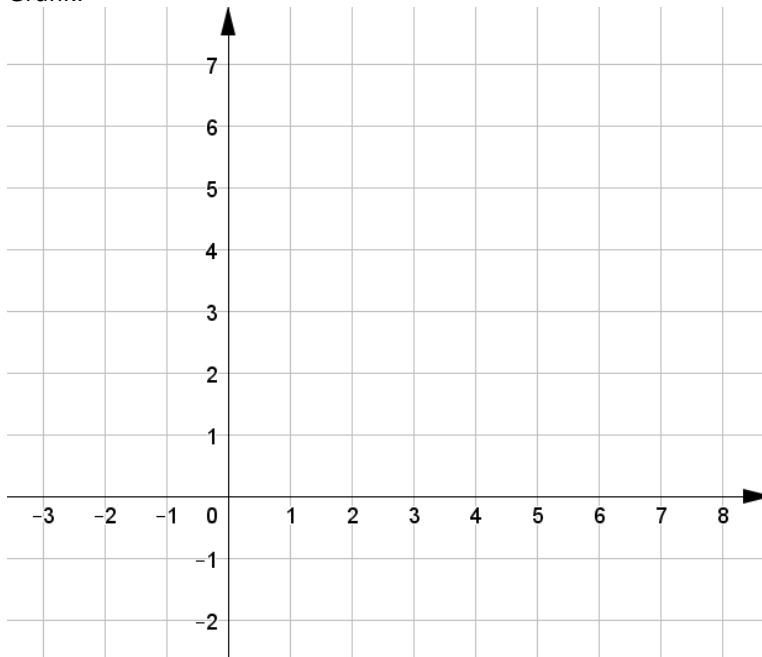
„Zielfunktion“

„unter den Nebenbedingungen“

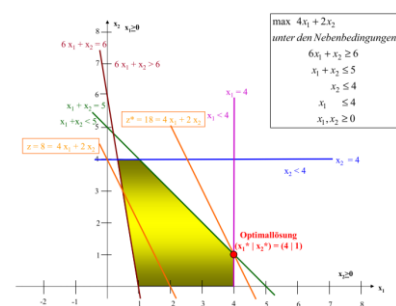
„Nichtnegativitätsbedingung“

udN

Grafik:



Lösung:



Aufgabe: Kaffee



Ein Kaffeehersteller besitzt zwei Sorten Kaffee. Den teuren Arabica-Kaffee kann er für 1000€/t verkaufen, während der günstige Robusta-Kaffee nur 700€/t einbringt. Die beiden Sorten werden auf zwei getrennten Plantagen angebaut. Die Arabica-Plantage bringt maximal 400t und die Plantage für Robusta 600t Kaffee. Beide Sorten werden in der gleichen Rösterei verarbeitet, die jedoch nur ein Fassungsvermögen von 850t aufweist.

Wie viele Tonnen von der Sorte Arabica und wie viele von der Sorte Robusta sollten auf den Markt gebracht werden, um maximalen Gewinn zu erzielen?

Aufgabenstellung:

- a) Formuliere das Problem als LP!
- b) Löse graphisch (z.B. GeoGebra)!

Lösung:

Zielfunktion:	$G(x_1, x_2) = 1000x_1 + 700x_2$	
Nebenbedingungen:	$x_1 \leq 400$	Arabica
	$x_2 \leq 600$	Robusta
	$x_1 + x_2 \leq 850$	Rösterei

$$\Rightarrow x_1 = 400, x_2 = 450, G = 715000\text{€}$$

Minimum-Problem

Wir mischen das Futter für unseren Hund aus zwei Produkten. Alle Angaben verstehen sich pro Mengeneinheit pro 100 g (ME/100g).

Gesucht ist die günstigste Mischung!

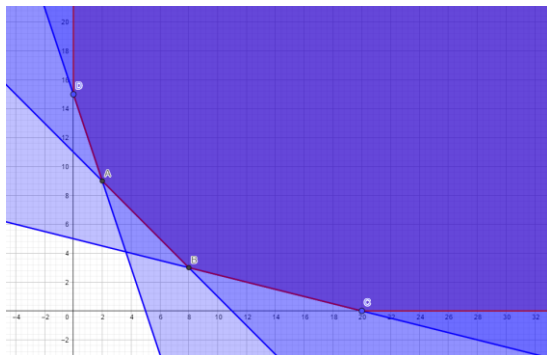
	Flocki	Pampi	Mindestbedarf (min)
Preis €/100g	2	4	
Eiweiß	6	2	30
Fett	2	2	22
Kohlehydrate	4	16	80

Aufgabenstellung:

Welche Mischung soll bevorzugt werden, um den Hund ordentlich zu ernähren, die Kosten dabei aber möglichst gering zu halten?

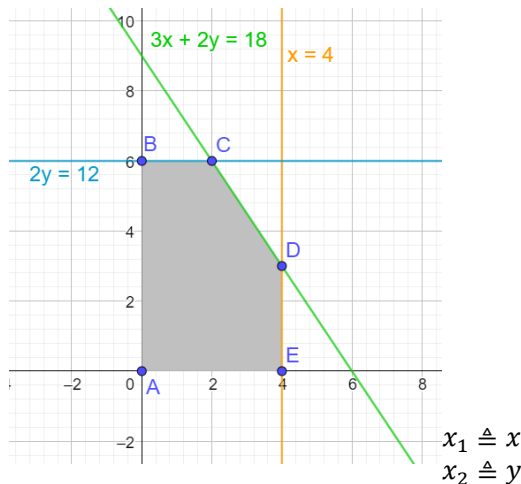
$$\begin{array}{ll} \text{LP min} & 2x_1 + 4x_2 \\ & \text{udN} \\ & 6x_1 + 2x_2 \geq 30 \\ & 2x_1 + 2x_2 \geq 22 \\ & 4x_1 + 16x_2 \geq 80 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Lösung: (8; 3)



Lineares Programm (LP) – Lösung durch Berechnung

Wir betrachten wieder unser Eingangsbeispiel.



$$\begin{array}{ll} \max & 30x_1 + 50x_2 \\ \text{udN} & \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & 1x_1 + 0x_2 \leq 4 \\ & 0x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & (x_1, x_2 \geq 0) \end{array}$$

(Die Nichtnegativitätsbedingung wird zur Verringerung der Komplexität weggelassen.)

Wir ergänzen die „Entscheidungsvariablen“ x_1 und x_2 in den Ungleichungen mit den sogenannten „Schlupfvariablen“ $s_i \geq 0$ so, dass eine Gleichungssystem entsteht.

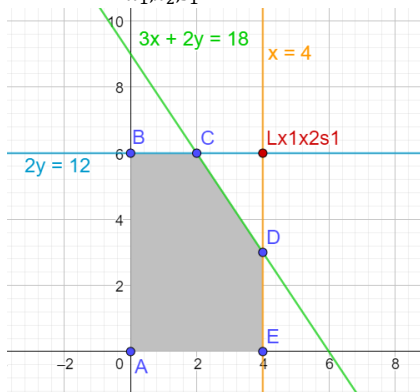
$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 + s_1 & = & 18 \\ 1x_1 + 0x_2 & + s_2 & = 4 \\ 0x_1 + 2x_2 & + s_3 & = 12 \end{array}$$

3 Gleichungen mit 5 Variablen (davon 3 Entscheidungsvariable) hat viele Lösungen. Um Lösungen zu finden, können 2 Variable festgelegt werden, die restlichen 3 Variable ergeben sich dann aus dem Gleichungssystem.

Auf Grund des Hauptsatzes der Linearen Optimierung kommen den Schnittpunkten der Nebenbedingungen besondere Bedeutung zu. Diese sogenannten „Basislösungen“ ergeben sich dadurch, dass die „überschüssigen Variablen“ Null gesetzt werden. Zuletzt vergleicht man die Gewinnfunktion für alle zulässigen Basislösungen $\rightarrow G_{\max}$.

Bezeichnung: L_{x_1, x_2, s_1} ist die Lösung mit $s_2 = s_3 = 0$

Beispiel: L_{x_1, x_2, s_1}



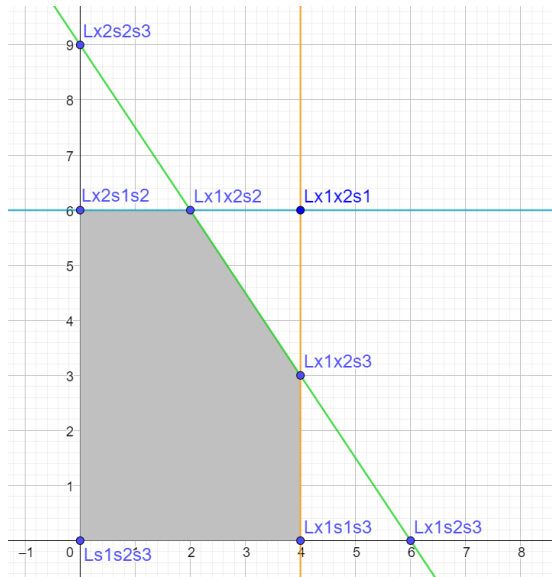
$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 + s_1 & = & 18 \\ 1x_1 + 0x_2 & = & 4 \\ 0x_1 + 2x_2 & = & 12 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} s_1 = -6 \\ x_1 = 4 \\ x_2 = 6 \end{array}$$

$L_{x_1, x_2, s_1} = (4, 6, -6, 0, 0)$ ist allerdings keine zulässige Lösung, da $s_1 \geq 0$ sein muss!

Beispiel: L_{x_1, x_2, s_2} ; ($s_1 = s_3 = 0$)

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 & = & 18 \\ 1x_1 + 0x_2 + s_2 & = & 4 \rightarrow \\ 0x_1 + 2x_2 & = & 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} s_2 = 2 \\ x_1 = 2 \\ x_2 = 6 \end{array}$$

$L_{x_1, x_2, s_2} = (2, 6, 0, 2, 0)$ ist eine zulässige Lösung mit einem Gewinn von $G(2, 6) = 30 \cdot 2 + 50 \cdot 6 = 360 \text{ €}$.



Beispiel: L_{x_1, x_2, s_3} ; ($s_1 = s_2 = 0$)

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 & = & 18 \\ 1x_1 + 0x_2 & = & 4 \rightarrow \\ 0x_1 + 2x_2 + s_3 & = & 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} s_3 = 6 \\ x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \end{array}$$

$L_{x_1, x_2, s_3} = (4, 3, 0, 0, 6)$ ist eine zulässige Lösung mit einem Gewinn von $G(4, 3) = 30 \cdot 4 + 50 \cdot 3 = 270 \text{ €}$.

Beispiel: L_{x_2, s_1, s_2} ; ($x_1 = s_3 = 0$)

$$\begin{array}{rcl} 2x_2 + s_1 & = & 18 \\ 0x_2 + s_2 & = & 4 \rightarrow \\ 2x_2 & = & 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} s_1 = 6 \\ s_2 = 4 \\ x_2 = 6 \end{array}$$

$L_{x_1, x_2, s_3} = (0, 6, 6, 4, 0)$ ist eine zulässige Lösung mit einem Gewinn von $G(0, 6) = 30 \cdot 0 + 50 \cdot 6 = 300 \text{ €}$.

Ergebnis: Im Vergleich mit allen Basislösungen ist $L_{x_1, x_2, s_2} = (2, 6, 0, 2, 0)$ die mit dem höchsten Gewinn!

LÖSUNG: Die optimale Lösung liegt wie schon bekannt bei 4 ME Kakao und 3 ME Schokolade mit dem maximalen Gewinn von $G(4, 3) = 270 \text{ €}$!

Beispiel Barkeeper

LP: $\max \quad 5.50x_1 + 4.50x_2 + 7.00x_3$

Nebenbedingungen:

Weißer Rum: $45x_1 + 20x_3 \leq 5000$

$45x_1 + 20x_3 + s_1 = 5000$

Cointreau: $30x_1 + 30x_2 + 20x_3 \leq 6000$

$30x_1 + 30x_2 + 20x_3 + s_2 = 6000$

Gin: $20x_3 \leq 3000$

$20x_3 + s_3 = 3000$

Wodka: $30x_2 + 20x_3 \leq 4000$

$30x_2 + 20x_3 + s_4 = 4000$

Aufgabenstellung: Berechne die Lösung L_{x_1, x_3, s_2, s_4} und den dabei zu erwartenden Gewinn!

Lösung: $L_{x_1, x_3, s_2, s_4} = \left(\frac{400}{9}; 0; 150; 0; \frac{950}{3}; 0; 100\right)$ ist zulässig mit $G\left(\frac{400}{9}; 0; 150\right) = 1294,44\text{€}$.

Die optimale Lösung liegt bei $G\left(\frac{400}{9}; \frac{100}{3}; 150\right) = 144,44\text{€}$.

Das Simplex-Verfahren

Das Verfahren wird hier nur skizziert. Das Simplex-Verfahren ist ein Algorithmus, bei dem geschickt ausgehend von einer Ecke des LP-Polyeders (Zulässigkeitsbereichs) entlang der Kanten der Reihe nach zu den anderen Eckpunkte mit immer höheren Zielfunktionswerten zu gelangen.

Formulierung des Linearen Programms:

$$LP: \max(\vec{c}^T \cdot \vec{x}; A \cdot \vec{x} \leq b)$$

Z.B. Barkeeper:

$$\text{Zielfunktion } z(x_1, x_2) = \vec{c}^T \cdot \vec{x} = (5,50 \quad 4,50 \quad 7,00) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 5,50 \cdot x_1 + 4,50 \cdot x_2 + 7,00 \cdot x_3$$

\vec{c}^T ... als Zeilenvektor transponiert

$$\text{Nebenbedingungen } A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 45 & 0 & 20 \\ 30 & 30 & 20 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 30 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 5000 \\ 6000 \\ 3000 \\ 4000 \end{pmatrix}$$

Eventuell notwendige *Anpassungen*:

- Ein Minimierungsproblem kann durch Multiplikation der Zielfunktion mit -1 in ein Maximierungsproblem verwandelt werden.
- Ungleichungen der Form $\sum A_{ij} \cdot x_j \geq b_i$ können als $\sum (-A_{ij}) \cdot x_j \leq -b_i$ umgeschrieben werden.

Das Simplex-Tableau fasst das LP in einer Tabelle zusammen.

Das Simplex-Tableau

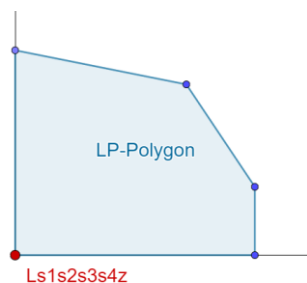
x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	z	b
-5,50	-4,50	-7,00	0	0	0	0	1	0
45	0	20	1	0	0	0	0	5000
30	30	20	0	1	0	0	0	6000
0	0	20	0	0	1	0	0	3000
0	30	20	0	0	0	1	0	4000

Zu lesen als (z.B. die 1. Zeile für die Zielfunktion): $-5,50 \cdot x_1 - 4,50 \cdot x_2 - 7,00 \cdot x_3 + z = 0$

Der Algorithmus

Start: Zu Beginn hat das LP eine zulässige Basislösung, die aus den Schlupfvariablen besteht. Diese kann als Startlösung verwendet werden:

$$L_{s_1, s_2, s_3, s_4, z} = (x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, s_4, z) = (0, 0, 0, 5000, 6000, 3000, 4000, 0)$$



„Basisaustauschregel“: Der Algorithmus kommt von einer Basislösung zur nächsten, indem pro Schritt eine Basisvariable ausgetauscht wird. (Genauer ist ein eigenes Thema ...)

Simplex-Verfahren als Software

App Google Play: Simplex Algorithm Calculator

Online-Rechner: <http://www.simplexme.com>

<https://www.matopt.de/werkzeuge/lineare-optimierung/simplexalgorithmus.html>

Aufgabe: Medikament



Ein Pharmaziehersteller möchte ein neues Medikament auf den Markt bringen. Das Medikament kann aus vier verschiedenen Komponenten (K1-K4) zusammengestellt werden. K1-K4 unterscheiden sich im Wirkstoffgehalt, wobei drei Wirkstoffe (W1-W3) von Interesse sind. Der Wirkstoffgehalt des Endproduktes muss Richtlinien zufolge innerhalb gegebener Grenzwerte liegen. Der Pharmaziehersteller möchte unter Beachtung der Richtlinien den Preis pro Gramm der Mischung minimieren.

Nährstoff- gehalt [mg/g]	K1	K2	K3	K4	unterer Grenzwert [mg/g]	oberer Grenzwert [mg/g]
W1	2	50	6	74	54	60
W2	1	75	13	96	39	80
W3	5	83	5	105	24	90
Preis [€/g]	39	21	82	55		

Aufgabenstellung:

Formuliere das Problem als LP und löse mithilfe einer entsprechenden Software!

Lösung:

$$\begin{aligned} 39x_1 + 21x_2 + 82x_3 + 55x_4 & \quad \text{!} = \min \\ 2x_1 + 50x_2 + 6x_3 + 74x_4 & \geq 54 \\ 2x_1 + 50x_2 + 6x_3 + 74x_4 & \leq 60 \\ x_1 + 75x_2 + 13x_3 + 96x_4 & \geq 39 \\ x_1 + 75x_2 + 13x_3 + 96x_4 & \leq 80 \\ 5x_1 + 83x_2 + 5x_3 + 105x_4 & \geq 24 \\ 5x_1 + 83x_2 + 5x_3 + 105x_4 & \leq 90 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0 \end{aligned}$$

$$x_2 = 0.98, x_4 = 0.07, x_1 = x_3 = 0.$$

Der Zielwert beträgt 24.27