



# GRUPPEN, RINGE, KÖRPER

ALGEBRAISCHE STRUKTUREN

RUDOLF UHLMANN

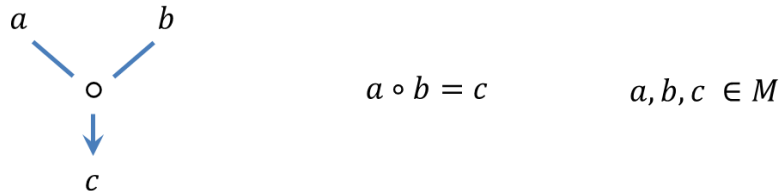
# Inhalt

1	Verknüpfungen .....	2
2	Mengen mit einer Verknüpfung $(M, \circ)$ .....	3
2.1	Gruppen .....	3
3	Mengen mit zwei Verknüpfungen $(M, \circ, \Delta)$ .....	4
3.1	Ringe .....	4
3.2	Körper .....	5
4	Vektorräume .....	6
5	Anhang .....	7
5.1	Beweise von Gruppeneigenschaften: .....	7
5.2	Nullteiler in Ringen und Körpern .....	8
5.3	Der Restklassenring $\mathbb{Z}_m$ modulo $m$ .....	9
5.4	Weitere Beispiele für Algebraische Strukturen .....	11
5.5	Übungen zu neutralem und inverselem Element .....	12

# 1 Verknüpfungen

Eine algebraische Struktur ist eine Menge ( $M$ ) versehen mit Verknüpfungen ( $\circ$ ) auf dieser Menge:  
( $M, \circ$ ) z.B.: ( $\mathbb{Z}, +$ ) ( $\mathbb{N}, \cdot$ ) ( $\mathbb{R}, +, \cdot$ )

Eine Verknüpfung auf einer Menge  $M$  ist eine Vorschrift, die je zwei Elementen  $a$  und  $b$  aus  $M$  (unter Beachtung der Reihenfolge) ein weiteres Element  $c$  von  $M$  zuordnet.



Es wird vorausgesetzt, dass die Menge bezüglich der Verknüpfung „abgeschlossen“ ist!  
Soll heißen: die Verknüpfung führt nie aus der Menge hinaus.

## Neutrales Element

Ein  $n \in M$  mit der Eigenschaft

$n \circ a = a$  für alle  $a \in M$  heißt linksneutrales Element von ( $M, \circ$ ).

$a \circ n = a$  für alle  $a \in M$  heißt rechtsneutrales Element von ( $M, \circ$ ).

## Inverses Element

Zu jedem  $a \in M$  gibt es ein  $a^* \in M$  mit der Eigenschaft

$a^* \circ a = n$  .  $a^*$  heißt linksinverses Element von  $a$ .

$a \circ a^* = n$  .  $a^*$  heißt rechtsinverses Element von  $a$ .

## Neutrales und inverses Element der Addition

Das neutrale Element ist die Null ( $n = 0$ )

Das inverse Element ist jeweils die ‚Gegenzahl‘ ( $a^* = -a$ ). Diese gibt es erst durch die Erweiterung der Zahlen auf mindestens  $\mathbb{Z}$ !

## Neutrales und inverses Element der Multiplikation

Das neutrale Element ist die Eins ( $n = e = 1$ )

Das inverse Element ist jeweils der ‚Kehrwert‘ ( $a^* = \frac{1}{a}$ ). Diese gibt es erst durch die Erweiterung der Zahlen auf mindestens  $\mathbb{Q}$ !

## 2 Mengen mit einer Verknüpfung $(M, \circ)$

### 2.1 Gruppen

#### Definition:

Eine algebraische Struktur  $G = (M, \circ)$  heißt „Gruppe“, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

V: Die nichtleere Menge  $M$  ist bezüglich der Verknüpfung abgeschlossen!

A: Es gilt das Assoziativgesetz:  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

N: Es gibt ein neutrales Element:  $n \circ a = a$

I: Jedes Element von  $M$  hat ein inverses Element:  $a^* \circ a = n$

#### Abelsche Gruppe

Gilt zusätzlich das Kommutativgesetz, so nennt man sie „abelsche Gruppe“.

K: Kommutativgesetz:  $a \circ b = b \circ a$

#### Halbgruppe

Gelten in einer algebraischen Struktur nur die beiden ersten Punkte (V, A), so nennt man sie „Halbgruppe“.

#### Eigenschaften und Beispiele

- Zu jedem Element  $a$  gibt es genau ein inverses Element, welches sowohl links- als auch rechtsseitig funktioniert.  $(a^* \circ a = a \circ a^* = n)$  (Siehe Beweis zu SATZ 1 und SATZ 4)
- Es gibt nur ein neutrales Element, welches sowohl links- als auch rechtsseitig funktioniert.  $(n \circ a = a \circ n = a)$  (Siehe Beweise zu SATZ 2 und SATZ 3)
- $(a^*)^* = a$  (Siehe Beweis zu SATZ 5)
- $(a \circ b)^* = b^* \circ a^*$
- $(\mathbb{N}, +)$  und  $(\mathbb{N}, \cdot)$  sowie  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  etc. sind nur (kommutative) Halbgruppen
- $(\mathbb{Z}, +)$  und  $(\mathbb{Q}, +)$  sowie  $(\mathbb{R}, +)$  sind kommutative (abelsche) Gruppen
- In Gruppen können Gleichungen gelöst werden:  $a \circ x = b$

$$\begin{aligned} a \circ x &= b & | a^* \circ \text{ linksseitig!} \\ a^* \circ (a \circ x) &= a^* \circ b \\ (a^* \circ a) \circ x &= a^* \circ b \\ n \circ x &= a^* \circ b \\ x &= a^* \circ b \end{aligned}$$

### 3 Mengen mit zwei Verknüpfungen $(M, \circ, \triangle)$

Als Beispiel sei  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  erwähnt.

Neben ASSOZIATIV- und KOMMUTATIVGESETZ betrachtet man auch die zwei

DISTRIBUTIVGESETZE

$$D1) (a \circ b) \triangle c = (a \triangle c) \circ (b \triangle c) \quad \dots \text{rechtsseitig}$$

$$D2) c \triangle (a \circ b) = (c \triangle a) \circ (c \triangle b) \quad \dots \text{linksseitig}$$

Da man die erste Verknüpfung ( $\circ$ ) gedanklich immer mit der Addition, die zweite Verknüpfung ( $\triangle$ ) mit der Multiplikation verbindet, nennt man das neutrale Element von ( $\circ$ ) Nullelement und das neutrale Element der zweiten ( $\triangle$ ) Einselement.

NULLELEMENT und EINSELEMENT

Das neutrale Element von ( $\circ$ ) heißt Nullelement  $n = 0$ .

Das neutrale Element von ( $\triangle$ ) heißt Einselement  $e = 1$ .

#### 3.1 Ringe

**Definition:**

Eine algebraische Struktur  $R = (M, \circ, \triangle)$  heißt „Ring“, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $(M, \circ)$  ist eine abelsche Gruppe  $(V, A, N, I, K)$ ,
- $(M, \triangle)$  ist eine Halbgruppe  $(V, A)$ ,
- Beide Distributivgesetze gelten  $(D1, D2)$

Der Name *Ring* bezieht sich nicht auf etwas anschaulich Ringförmiges, sondern auf einen organisierten Zusammenschluss von Elementen zu einem Ganzen (vgl. *Maschinenring*, *Verbrecherring*, *Tauschring*). (Wikipedia)

Der bekannteste Ring ist  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ .

## 3.2 Körper

### Definition:

Eine algebraische Struktur  $K = (M, \circ, \Delta)$  heißt „Körper“, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $(M, \circ)$  eine abelsche Gruppe ist  $(V, A, N, I, K)$ ,
- $(M \setminus \{0\}, \Delta)$  eine abelsche Gruppe ist  $(V, A, N, I, K)$ ,
- Beide Distributivgesetze gelten  $(D)$

Die bekanntesten Körper sind  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  und  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ .

Kurz gesagt ist ein Körper eine Menge mit zwei Verknüpfungen vergleichbar der Addition und Multiplikation, die sich ähnlich dem Rechnen in  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  verhalten. Es existiert eine additive Inverse  $-a$  für alle Elemente  $a$ , und eine multiplikative Inverse  $\frac{1}{b} = b^{-1}$  für alle Elemente  $b$  außer der Null. Das erlaubt es, die Umkehroperationen Subtraktion  $a - b$  und Division  $a : b$  zu definieren:

$$a - b := a + (-b)$$

$$a : b := a \cdot \frac{1}{b}$$

Falls eine Algebraische Struktur ein Körper ist, können wir darin umgehen, wie wir das in den Reellen Zahlen mit den vier Grundrechnungsarten gewohnt sind 😊

## 4 Vektorräume

### Definition:

Eine algebraische Struktur  $V = (M, \oplus, \odot)$  heißt Vektorraum über dem Körper  $(K, +, \cdot)$  oder kurz **K-Vektorraum**, wenn folgende Bedingungen gelten:

- $(M, \oplus)$  ist eine abelsche (kommutative) Gruppe.
- Für  $\oplus$  und  $\odot$  gelten die Rechenregeln:  
 $a, b \in M \dots$  Vektoren ;  $\lambda, \mu \in K \dots$  Skalare  

$$\lambda \odot (a \oplus b) = (\lambda \odot a) \oplus (\lambda \odot b)$$
$$(\lambda + \mu) \odot a = (\lambda \odot a) \oplus (\mu \odot a)$$
$$(\lambda \cdot \mu) \odot a = \lambda \odot (\mu \odot a)$$
$$1 \odot a = a$$

*einfacher geschrieben:*  
$$\lambda \cdot (a + b) = (\lambda \cdot a) + (\lambda \cdot b)$$
$$(\lambda + \mu) \cdot a = (\lambda \cdot a) + (\mu \cdot a)$$
$$(\lambda \cdot \mu) \cdot a = \lambda \cdot (\mu \cdot a)$$
$$1 \cdot a = a$$

Die Elemente eines Vektorraums werden gerne auch mit Pfeilen assoziiert und akzentuiert.

Z.B.:  $\vec{a}$

### Die Verknüpfungen:

$\oplus$  Die „Vektoraddition“ zwischen den Elementen aus  $V$ .

Sie ist eine innere Verknüpfung.

$\odot$  Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar aus dem Körper  $K$  (z.B.  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ).

Sie ist eine äußere Verknüpfung. Ihr Ergebnis ist allerdings wieder ein Vektor.

### Bemerkungen:

Bei Vektoren hat man die Vektoraddition als innere Verknüpfung und die Skalarmultiplikation als Beispiel einer äußeren Verknüpfung.

Skalar- und Vektorprodukt werden hier nicht betrachtet. Das Vektorprodukt ist nur eine 3dim Konstruktion und das Skalarprodukt führt aus der Menge der Vektoren hinaus.

## 5 Anhang

### 5.1 Beweise von Gruppeneigenschaften:

**Satz 1** In einer Gruppe ist ein inverses Element sowohl links- auch rechtsinvers!

**Beweis:**

In einer Gruppe gilt  $n \circ a = a$  (linksneutral) und  $a^* \circ a = n$  (linksinvers).

Zu zeigen ist, dass auch  $a \circ a^* = n$  (rechtsinvers)!

Die Verknüpfung von rechts ergibt ...

$$a \circ a^* = n \circ (a \circ a^*) = [(a^*)^* \circ (a^*)] \circ (a \circ a^*) = (a^*)^* \circ [a^* \circ a] \circ a^* = (a^*)^* \circ a^* = n$$

Damit wurde gezeigt, dass  $a \circ a^* = n$ ,  $a^*$  ist also rechtsinvers!  $\square$

**Satz 2** In einer Gruppe ist ein neutrales Element sowohl links- als auch rechtsneutral!

**Beweis:**

In einer Gruppe gilt  $n \circ a = a$  (linksneutral) und  $a^* \circ a = n$  (linksinvers).

Zu zeigen ist, dass auch  $a \circ n = a$  (rechtsneutral)!

Die Verknüpfung von rechts ergibt ...

$$a \circ n = a \circ (a^* \circ a) = (a \circ a^*) \circ a = n \circ a = a \quad (\text{Vgl. Satz 1}) \quad a^* \text{ ist links- und rechtsinvers}$$

$n$  ist also auch rechtsneutral!  $\square$

**Satz 3** In einer Gruppe gibt es nur ein neutrales Element!

**Beweis:**

$$\text{Falls es zwei gäbe ... } n_1 \text{ und } n_2 \Rightarrow n_2 = n_1 \circ n_2 = n_2 \circ n_1 = n_1$$

Falls es zwei neutrale Elemente gäbe, dann wären sie gleich 😊 !  $\square$

**Satz 4** In einer Gruppe gibt es zu jedem Element nur ein inverses!

**Beweis:**

Falls es zwei gäbe ...  $(a^*)_1$  und  $(a^*)_2$

$$\Rightarrow (a^*)_2 = (a^*)_2 \circ n = (a^*)_2 \circ [a \circ (a^*)_1] = [(a^*)_2 \circ a] \circ (a^*)_1 = n \circ (a^*)_1 = (a^*)_1$$

Falls es zwei inverse Elemente gäbe, dann wären sie gleich 😊 !  $\square$

**Satz 5**  $(a^*)^* = a$

**Beweis:**

Es ist sowohl  $(a^*)^* \circ a^* = n$ , als auch  $a \circ a^* = n$ . Man kann das so lesen, dass das Element  $a^*$  sowohl  $(a^*)^*$  als auch  $a$  als linksinverses Element besitzt. Da in einer Gruppe jedes Element nur ein inverses Element besitzt, sind die beiden gleichzusetzen!  $\square$

**Satz 6**  $(a \circ b)^* = b^* \circ a^*$

**Beweis:**

$(a \circ b)^*$  ist das linksinverse Element zu  $(a \circ b)$ . Es wird gezeigt, dass auch  $b^* \circ a^*$  linksinvers zu  $(a \circ b)$  ist. Da es nur jeweils ein inverses Element gibt, müssen die beiden gleich sein!

$$(b^* \circ a^*) \circ (a \circ b) = b^* \circ (a^* \circ a) \circ b = b^* \circ n \circ b = b^* \circ b = n ! \square$$

## 5.2 Nullteiler in Ringen und Körpern

**Definition** („Teiler von“):

Lässt sich in einer Ringstruktur  $R = (M, \oplus, \odot)$  eine Zahl  $c$  als Produkt  $c = a \odot b$  darstellen, dann heißen die Faktoren  $a$  und  $b$  Teiler der Zahl  $c$ .

Betrachten wir die zweistellige Struktur  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  mit der additiven und einer multiplikativen Verknüpfung. Interessant ist dabei der Fall  $a \cdot b = n$ , also  $a \cdot b = 0$ . Es geht also um die Teiler des neutralen Elements der additiven Verknüpfung.

**Definition** (Nullteiler):

Da  $a \cdot 0 = 0$  und  $0 \cdot b = 0$ , somit ist die Null und jede andere Zahl ein Teiler von 0. Das ist trivial. Als (echte) **NULLTEILER** bezeichnet man Zahlen  $a \neq 0$  und  $b \neq 0$  mit  $a \cdot b = 0$ !

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist nullteilerfrei. Das bedeutet, wenn  $a \cdot b = 0$ , dann ist entweder  $a = 0$  oder  $b = 0$  und die gelten eben nicht als Nullteiler.

Dies ist aber nicht in allen Ringen so.

Beim Rechnen mit Uhrzeiten in  $(\mathbb{N}_{12}, +, \cdot)$  gibt es Nullteiler. Ein Beispiel wäre  $2 \cdot 6 = (12) = 0$ .

Beim Rechnen mit Wochentagen in  $(\mathbb{N}_7, +, \cdot)$  gibt es keine Nullteiler.

**Wichtig:** Falls es Nullteiler gibt, ist das Kürzen in Gleichungen problematisch! In Ringen gibt es bezüglich der zweiten Verknüpfung nicht zwingend ein inverses Element. Deshalb muss man Gleichungen anders lösen. Betrachten wir mit  $a \neq 0$  die folgende Gleichung:

$$a \cdot x = a \cdot y$$

$$a \cdot x - a \cdot y = 0$$

$$a \cdot (x - y) = 0$$

Erfolgt die Berechnung in einem nullteilerfreien Ring, so muss  $(x - y) = 0$  sein und damit

$$x = y$$

Existieren im Ring Nullteiler, so folgt aus  $a \cdot x = a \cdot y$  nicht zwingend  $x = y$  !

Z. B.  $(\mathbb{N}_{12}, +, \cdot)$  Uhrzeiten 0 ... 12

$$2 \cdot x = 2 \cdot y \rightarrow 2 \cdot (x - y) = 0$$

Eine Lösung wäre  $x = 9$  und  $y = 3$ , da  $2 \cdot (9 - 3) = 2 \cdot 6 = 0$ .

$$2 \cdot 9\text{Uhr} = 18\text{Uhr} = 6\text{Uhr}$$

$$2 \cdot 3\text{Uhr} = 6\text{Uhr}$$

**Bemerkung:** Nicht jeder Ring, dafür aber **jeder Körper** wie z. B.  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  und  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  ist **frei von Nullteilern**.

Das bedeutet, wenn  $a \cdot b = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0$  !!!

## 5.3 Der Restklassenring $\mathbb{Z}_m$ modulo $m$

Es sei  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  und  $r \in \mathbb{Z}$

Die Restklasse „ $r$  modulo  $m$ “ ist die Menge aller ganzen Zahlen mit dem gleichen Rest  $r$  bezüglich der Vielfachen von  $m$ .

$$[r]_m = \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, \quad b = m \cdot k + r\}$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	...																		
$\equiv_4 0$	$\equiv_4 1$	$\equiv_4 2$	$\equiv_4 3$	$\equiv_4 0$	$\equiv_4 1$	$\equiv_4 2$	$\equiv_4 3$	$\equiv_4 0$	$\equiv_4 1$	$\equiv_4 2$	$\equiv_4 3$	$\equiv_4 0$	$\equiv_4 1$	$\equiv_4 2$	$\equiv_4 3$	$\equiv_4 0$	$\equiv_4 1$	$\equiv_4 2$	$\equiv_4 3$
$4k+0$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$4k+0$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$4k+0$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$4k+0$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$4k+0$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$

Tabelle 1: Restklassen modulo 4 (0 bis 100)

Z.B.:  $[6]_{10} = \{\dots, -14, -4, 6, 16, 26, 36, 46, \dots\}$

$[3]_5 = \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$

Elemente innerhalb einer Restklasse werden als äquivalent modulo  $m$  bezeichnet:

$$26 \equiv 6 \pmod{10}$$

Z.B.:  $\mathbb{Z}_5 = \{[0]_5, [1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5\} = \text{kurz } \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Beispiel: Der Restklassenring  $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$  versus  $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$

Die Verknüpfungstabellen der Addition: (Restklassen in Kurzschreibweise)

$\mathbb{Z}_6$	+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5	
1	1	2	3	4	5	0	
2	2	3	4	5	0	1	
3	3	4	5	0	1	2	
4	4	5	0	1	2	3	
5	5	0	1	2	3	4	

$\mathbb{Z}_5$	+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4	
1	1	2	3	4	0	
2	2	3	4	0	1	
3	3	4	0	1	2	
4	4	0	1	2	3	

Die Verknüpfungstabelle der Multiplikation:

$\mathbb{Z}_6$	$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0		0	0	0	0	0	0
1		0	1	2	3	4	5
2		0	2	4	0	2	4
3		0	3	0	3	0	3
4		0	4	2	0	4	2
5		0	5	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_5$	$\cdot$	0	1	2	3	4
0		0	0	0	0	0
1		0	1	2	3	4
2		0	2	4	1	3
3		0	3	1	4	2
4		0	4	3	2	1

### Beispiele: (Überprüfung einiger Ringeigenschaften)

- $(\mathbb{Z}_6, +)$  ist kommutativ.  
Dies erkennt man an der Symmetrie entlang der Diagonalen.
- $(\mathbb{Z}_m, +)$  ist assoziativ.  
Dies beruht im Wesentlichen auf dem Assoziativgesetz der Addition ganzer Zahlen generell.  
$$(a + b) + c = [(mk_a + r_a) + (mk_b + r_b)] + (mk_c + r_c) = \dots$$
$$= (k_a + k_b + k_c) \cdot m + r_a + r_b + r_c \equiv r_a + r_b + r_c \equiv \dots = a + (b + c)$$
- In  $(\mathbb{Z}_6, +)$  hat jedes Element ein inverses.  
Z.B.  $4^* = 2$ , da  $4 + 4^* = 4 + 2 = 0$ . In jeder Spalte und jeder Zeile steht einmal das neutrale Element als Ergebnis.
- $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$  hat Nullteiler.  
Obwohl selbst nicht 0, ergibt die Multiplikation 0. Z.B.  $2 \cdot 3 = 0$
- In  $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$  lassen sich lineare Gleichungen nicht immer über Äquivalenzumformungen eindeutig lösen.  
Z.B.  $5x = 4$  lässt sich lösen, da 5 ein inverses Element besitzt!

$$\begin{aligned} 5 \cdot x &= 4 & | \cdot 5 \\ 5 \cdot (5 \cdot x) &= 5 \cdot 4 \\ (5 \cdot 5) \cdot x &= 2 \\ 1 \cdot x &= 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Im Gegensatz dazu lässt sich die Gleichung  $2x = 4$  so nicht lösen, da 2 kein inverses Element besitzt.

$$2 \cdot x = 4 \quad | \cdot ?$$

Gemäß Verknüpfungstabelle hat die Gleichung allerdings die zwei Lösungen 2 und 5.

### Aufgaben:

- Überprüfe  $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$  auf Kommutativität!
- Überprüfe  $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$  auf inverse Elemente!
- Wenn alle  $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$  Ringe sind, ist dann  $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$  zusätzlich auch ein Körper?
- Hat  $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$  Nullteiler?
- Sind lineare Gleichungen in  $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$  mittels Äquivalenzumformungen eindeutig lösbar?
- Sind lineare Gleichungen in  $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$  mittels Äquivalenzumformungen eindeutig lösbar?
- Bestimme das inverse Element sowohl in  $(\mathbb{Z}_7, +)$  als auch in  $(\mathbb{Z}_7, \cdot)$ !
- Hat  $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$  Nullteiler?

## 5.4 Weitere Beispiele für Algebraische Strukturen

a) Überprüfe folgende Algebraische Strukturen:

$$(\mathbb{N}, +); (\mathbb{Z}, +); (\mathbb{Z}, \cdot); (\mathbb{Q}, \cdot)$$

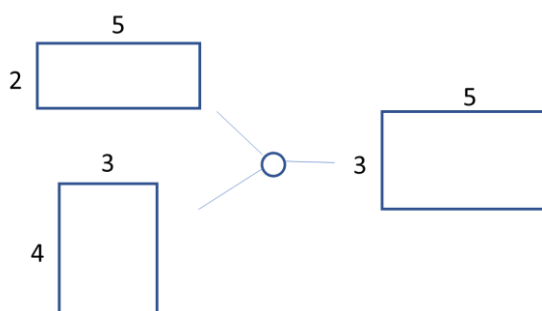
b)  $(P; \circ)$ , wobei  $P$  die Menge aller Punkte einer Ebene darstellt. Für zwei Punkte  $A$  und  $B$  der Ebene sei  $A \circ B = C = M_{AB}$ , die Streckenmitte.

c) Vererbung der Seitenlänge (Länge, Breite  $\geq 0$ )

$M$  ... Menge aller Rechtecke (definiert durch die Länge und Breite, Länge  $\geq$  Breite)

$R_1 \circ R_2 = R_3$  ... wobei  $R_3$  die größere der Längen und die größere der Breiten bekommt.

z.B.



d)  $(M = \text{Uhrzeiten modulo } 12, +)$  z.B.  $(9 + 10) + 11 = 6$

e)  $(W, \circ)$ , wobei  $W = \{\text{Menge aller Worte, die aus den Buchstaben } a \text{ und } b \text{ bestehen}\}$  und  $\circ$  die Aneinanderreihung, z.B.  $a \circ b = ab$ ,  $abb \circ ba = abbba$

f) Der Polynomring  $K[x]$

Beispiele:  $p_1 = 4 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 0,5$ ,  $p_2 = 0,5 \cdot x^5 - \sqrt{2} \cdot x^3 + 4 \cdot x$ , ... wobei die Koeffizienten Elemente der Koeffizientenmenge  $K$  sind.

Mit Polynomen kann man rechnen. Beispiel  $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$

$$p = 3x + 2 \text{ und } q = x^2 - x + 2 \rightarrow p + q = x^2 + 2x + 4 \text{ und } p \cdot q = 3x^3 - x^2 + 4x + 4$$

Überprüfe, ob  $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$  einen Ring darstellt!

g) Betrachte die algebraische Struktur  $(\mathbb{Z}, \circ)$  mit  $a \circ b = a + b - 8$  und überprüfe die Gruppeneigenschaften!

h)  $M = \{-1, +1\}$  Zeige, dass  $(M, \cdot)$  eine Gruppe ist. Zeige anhand der Verknüpfungstabelle!

•	+1	-1
+1		-1
-1		

## 5.5 Übungen zu neutralem und inversem Element

a)  $(\mathbb{N}, \circ)$  mit  $a \circ b = \max(a, b)$

Neutrales Element:  $n \circ a = a$   
 $n \circ a = \max(n, a) \rightarrow n = 0$

Inverses Element:  $a^* \circ a = n$   
 $a^* \circ a = \max(a^*, a) = 0 \dots$  existiert nicht (nur für  $a = 0$ )!

b)  $(\mathbb{N}, \circ)$  mit  $a \circ b = \min(a, b)$

Neutrales Element:  $n \circ a = a$   
 $n \circ a = \min(n, a) \rightarrow n = (\infty) \dots$  existiert nicht!  
(In  $\mathbb{Z}_0^-$  wäre  $n = 0$ !)

Inverses Element: Da es kein neutrales Element gibt, existieren auch keine Inversen.

c)  $(\mathbb{N}, \circ)$  mit  $a \circ b = \text{mean}(a, b) = \frac{a+b}{2}$

Neutrales Element:  $n \circ a = a$   
 $n \circ a = \text{mean}(n, a) \rightarrow n = (a) \dots$  existiert nicht einheitlich!