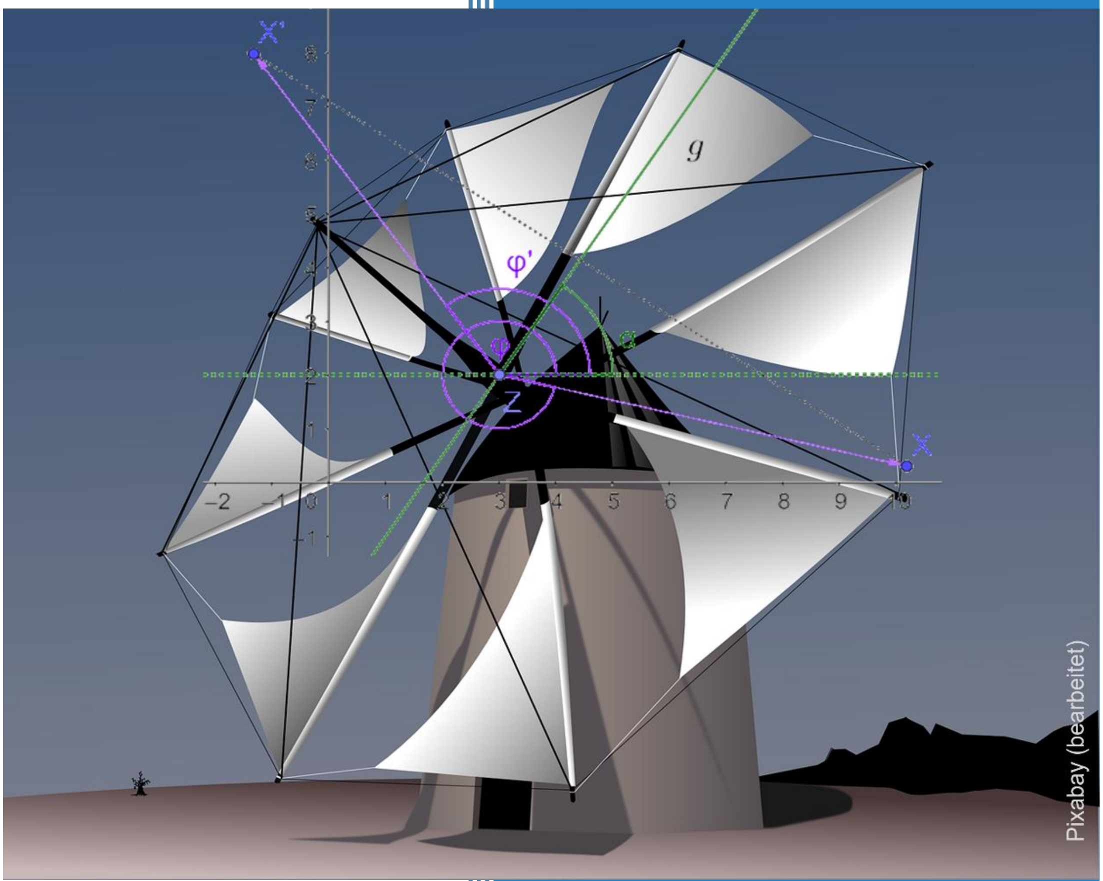
Geometrische Abbildungen

Matrizen



Uhlmann

INHALT

EINLEITUNG

Bilder oder Vektorgrafiken in Dokumenten können nach dem Einfügen noch auf vielfältige Weise angepasst werden. Sie können verschoben, gedreht, gespiegelt oder neu skaliert werden.

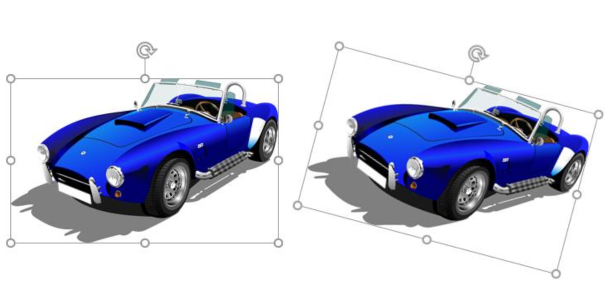
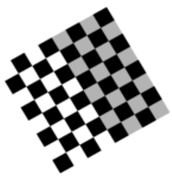
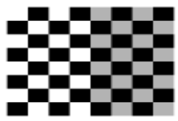


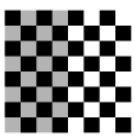
Abb. 1

Die Grundelemente dieser zweidimensionalen geometrischen Abbildungen beruhen auf affinen Transformationen, bei denen Punkte sowie gerade und parallele Linien erhalten bleiben.

Dabei wird jeder Punkt $X \in \mathbb{R}^2$ auf einen Bildpunkt $X' \in \mathbb{R}^2$ abgebildet.

Die Berechnungen lassen sich dabei durch charakteristische 2x2-Abbildungs-matrizen bewerkstelligen.

Original	***Drehung***	***Skalierung***
		
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_y \end{pmatrix}$

Spiegelung	***Scherung***	***Verschiebung***
		
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & c_x \\ c_y & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & v_x \\ 0 & v_y \end{pmatrix}$

1 DREHUNG

Abbildungsmatrix: $D = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Beispiel

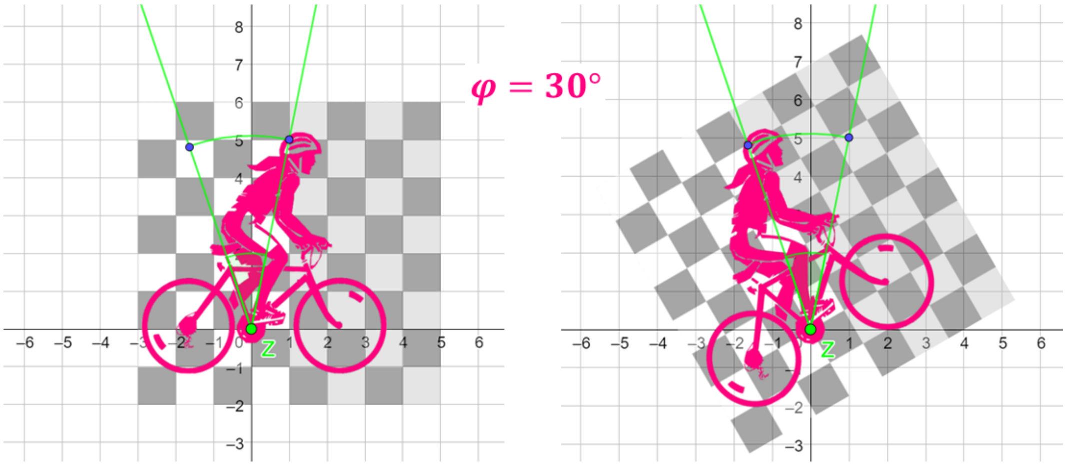


ABB. 2

Drehung um Zentrum $Z = (0|0)$ und Drehwinkel $\varphi = 30°$.

$$D = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 \\ 0{,}500 & 0{,}866 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow X' = D \cdot X = \begin{pmatrix} 0{,}866 & -0{,}500 \\ 0{,}500 & 0{,}866 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}634 \\ 4{,}830 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

$$X' = D \cdot X = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot x - \sin(\varphi) \cdot y \\ \sin(\varphi) \cdot x + \cos(\varphi) \cdot y \end{pmatrix}$$

BEGRÜNDUNG DER DREHMATRIX-FORMEL

Betrachten wir zuerst nur die Drehung der **Basisvektoren** $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{x}' = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \text{ und } \hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{y}' = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$ (Siehe Abb. 3)

Eine allfällige Drehmatrix muss also folgende Bedingung erfüllen:

$$D \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\varphi) \\ sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\varphi) \\ sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$d_{11} = \cos(\varphi)\,; d_{21} = \sin(\varphi)$

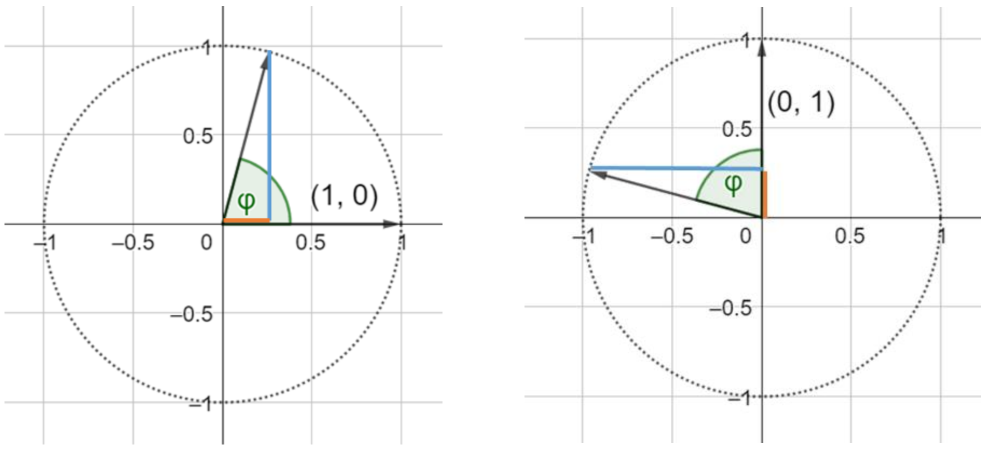


ABB. 3

Ähnliches gilt für den zweiten Basisvektor:

$$D \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$d_{12} = -\sin(\varphi)\,; d_{22} = \cos(\varphi)$

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}}$$

Dass diese Drehmatrix für jeden Punkt $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gültig ist, zeigt folgende Überlegung.

$$D \cdot X = D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right] = D \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + D \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \cdots$$

$$\ldots = D \cdot \left[x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + D \cdot \left[y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = x \cdot \left[D \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + y \cdot \left[D \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= x \cdot \begin{pmatrix} cos(\varphi) \\ sin(\varphi) \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -sin(\varphi) \\ cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} cos(\varphi) & -sin(\varphi) \\ sin(\varphi) & cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot X$$

Die Drehmatrix, die die Basisvektoren dreht, dreht auch jeden beliebigen Punkt.

2 SKALIERUNG

Abbildungsmatrix: $Sk = \begin{pmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_y \end{pmatrix}$

Beispiel

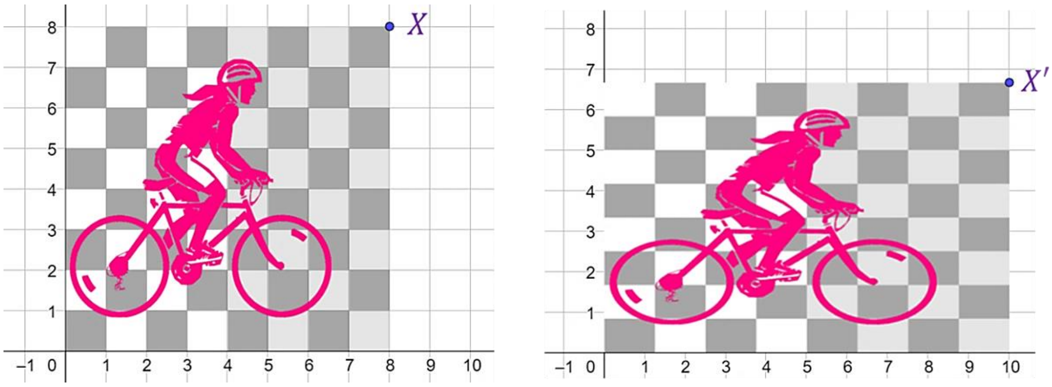


ABB. 4

Skalierung meint die Größenänderung eines Bildes. Dabei kann der Skalierungsfaktor in x- bzw. y-Achse (c_x, c_y) unterschiedlich sein.

$$c_x = 1{,}25\,; \;\; c_y = 0{,}8$$

$$Sk = \begin{pmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow X' = \begin{pmatrix} 1{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6{,}8 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

$$X' = Sk \cdot X = \begin{pmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \cdot x \\ c_y \cdot y \end{pmatrix}$$

3 SCHERUNG

Abbildungsmatrix: $Sh = \begin{pmatrix} 1 & c_x \\ c_y & 1 \end{pmatrix}$

Beispiel

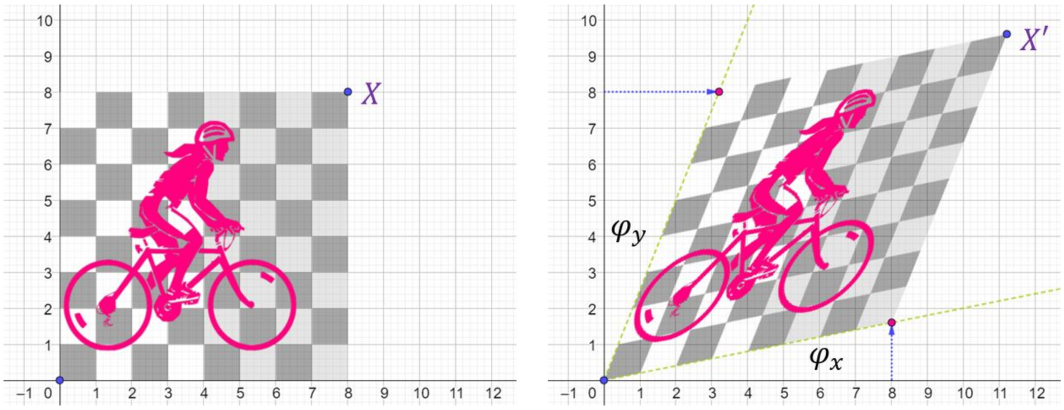


ABB. 5

Die Scherung ist richtungsabhängig. Alle Punkte werden dabei proportional zu ihrem Abstand von der Scherachse parallel zu dieser verschoben.

$$c_x = \tan(\varphi_y) = 0{,}4\,;\;\; c_y = \tan(\varphi_x) = 0{,}2$$

$$Sh = \begin{pmatrix} 1 & c_x \\ c_y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow X' = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11{,}2 \\ 9{,}6 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

$$X' = Sh \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & c_x \\ c_y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + c_x \cdot y \\ c_y \cdot x + y \end{pmatrix}$$

Sonderfälle:

Scherung in x-Richtung $Sh_x = \begin{pmatrix} 1 & c_x \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$

Scherung in y-Richtung $Sh_y = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ c_y & 1 \end{pmatrix}$

4 VERSCHIEBUNG

Die Verschiebung (Translation) lässt sich nicht durch eine 2x2-Matrix beschreiben.

Verschiebungsvektor: $\vec{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$

Beispiel

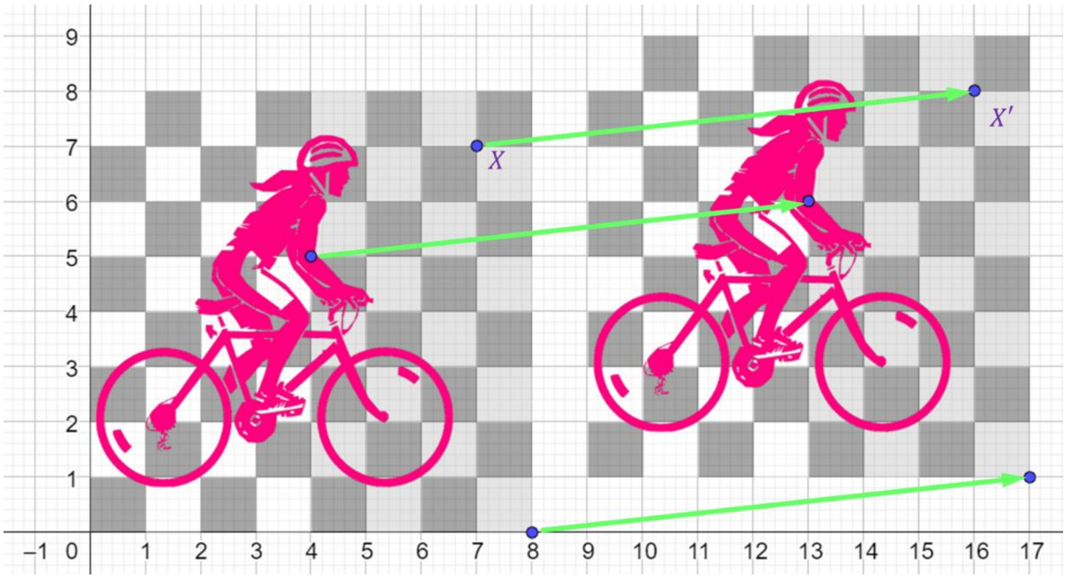


ABB. 6

Die Scherung ist richtungsabhängig. Alle Punkte werden dabei proportional zu ihrem Abstand von der Scherachse parallel zu dieser verschoben.

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow X' = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

$$X' = X + \vec{t} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{pmatrix}$$

5 HOMOGENE KOORDINATEN

Sind mehrere Transformationen hintereinander auszuführen, so ist von Vorteil, dass die **Multiplikation von Matrizen assoziativ** ist. Es können dadurch alle Abbildungsmatrizen zuvor multipliziert werden und die daraus resultierende Matrix auf die Punkte der Grafik angewendet werden.

Beispiel: $X' = Sh \cdot \big(Sc \cdot (D \cdot X)\big) = (Sc \cdot Sh \cdot D) \cdot X$

Dies kommt häufig vor. Denn bei den bisher besprochenen Beispielen war der Nullpunkt immer Fixpunkt der Transformation. Soll eine Grafik nicht um den Ursprung gedreht werden, so muss die Grafik zuerst so weit verschoben, dass das Drehzentrum im Nullpunkt zu liegen kommt. Nach der Drehung wird das Objekt dann wieder zurückgeschoben. Dabei ist von großem Nachteil, dass die Translation nicht wie die anderen Abbildungen durch eine Matrix-Multiplikation berechnet wird.

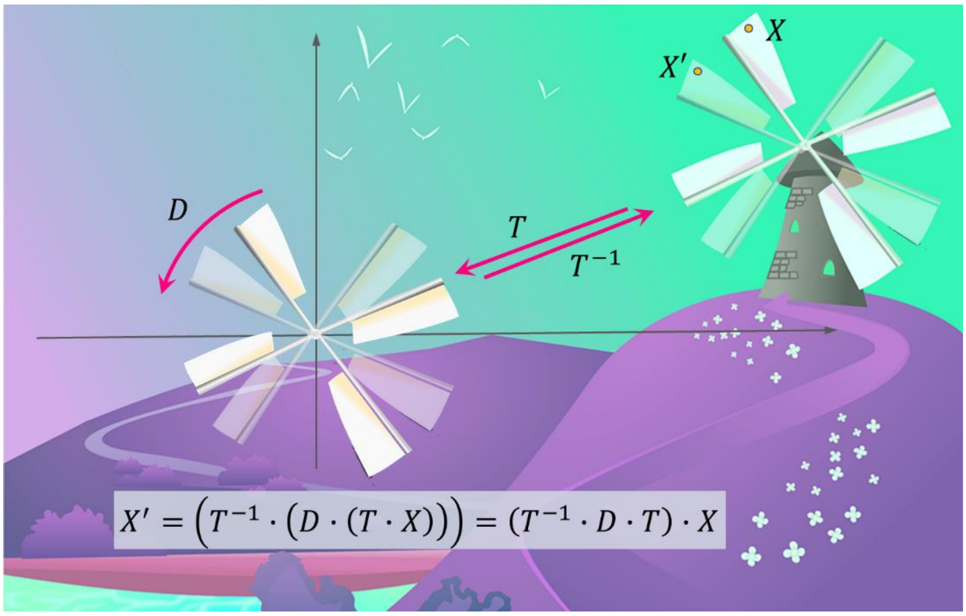


ABB. 7 (Pixabay, bearbeitet)

Mit der Einführung von 3x3-Matrizen gelingt dies allerdings. Man fügt eine weitere Dimension hinzu, die man nach der Berechnung wieder außer Acht lassen kann. Die dabei verwendeten Koordinaten werden in der mathematischen Literatur homogene Koordinaten genannt. Im Gegensatz dazu bezeichnet man die realen Koordinaten als die kartesischen Koordinaten.

Punktkoordinaten homogen $X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$, ***kartesisch*** $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Die Translationsmatrix in homogenen Koordinaten

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{t_X} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{t_y} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$X' = T \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_X \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 0 + t_x \\ 0 + y + t_y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow X' = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{pmatrix}$$

Die Drehmatrix in homogenen Koordinaten

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \cos(\boldsymbol{\varphi}) & -\sin(\boldsymbol{\varphi}) & \boldsymbol{0} \\ \sin(\boldsymbol{\varphi}) & \cos(\boldsymbol{\varphi}) & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

Die Skalierungsmatrix in homogenen Koordinaten

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{Sc} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c_x} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c_y} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

Die Schermatrix in homogenen Koordinaten

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{Sh} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{c_x} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{c_y} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

Beispiel (Siehe Abb. 7)

Gegeben: $X = \begin{pmatrix} 12{,}2 \\ 7{,}6 \end{pmatrix}$ Drehzentrum $Z = \begin{pmatrix} 13{,}8 \\ 5{,}0 \end{pmatrix}$ Drehwinkel $\varphi = 40°$

Gesucht: X'

Lösung:

$X' = T^{-1} \cdot \left(D \cdot (T \cdot X)\right) = (T^{-1} \cdot D \cdot T) \cdot X$

Die Matrix-Multiplikation ist per se nicht kommutativ. Man kann also nicht in der Klammer die Operationen vertauschen. Das Ergebnis wäre auch offensichtlicher Blödsinn. Insgesamt käme die Rotation um Z einer Rotation um den Ursprung gleich ($T^{-1} \cdot D \cdot T = T^{-1} \cdot T \cdot D = I \cdot D = D$).

$$X_T = T \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -12{,}2 \\ 0 & 1 & -7{,}6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12{,}2 \\ 7{,}6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}6 \\ 2{,}6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_{DT} = \begin{pmatrix} 0{,}766 & -0{,}643 & 0 \\ 0{,}643 & 0{,}766 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1{,}6 \\ 2{,}6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}897 \\ 0{,}963 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_{T^{-1}DT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12{,}2 \\ 0 & 1 & 7{,}6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2{,}897 \\ 0{,}963 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10{,}903 \\ 5{,}963 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X' \approx \begin{pmatrix} 10{,}9 \\ 6{,}0 \end{pmatrix}}$$

6 INVERSE TRANSFORMATIONEN

Das Beispiel hat gezeigt, dass gewisse Operationen die Umkehrung von Tranformationsschritten nötig machen. Diese Umkehrung wird durch die inverse Matrix der entsprechenden geometrischen Abbildung erreicht.

$$A \cdot A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oft ist die inverse Matrix schon aus geometrischen Überlegungen klar.

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & +\sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Sc^{-1} = \begin{pmatrix} 1/c_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Sh^{-1} = \frac{1}{1 - a_x a_y} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -a_x & 0 \\ -a_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - a_x a_y \end{pmatrix}$$

Bemerkung

- Für die **Umkehrung einer Drehung** gilt:

$$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi) \quad , \cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$$

- Der Beweis für die **Umkehrung der Scherung** erfolgt über $Sh^{-1} \cdot Sh = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & -a_x & 0 \\ -a_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - a_x a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a_x & 0 \\ a_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a_x a_y & 0 & 0 \\ 0 & 1 - a_x a_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 - a_x a_y \end{pmatrix}$$

7 ANHANG

7.1 ACHSENSPIEGELUNG

Die Spiegelung eines Punktes X an einer Geraden kann als symmetrische Drehung um einen beliebigen Punkt Z der Spiegelachse g angesehen werden.

Für die Spiegelung an einer durch den Nullpunkt verlaufenden Geraden $g = k \cdot x$ ergibt sich folgende Abbildungsmatrix:

Abbildungsmatrix: $S = \begin{pmatrix} \cos(2\kappa) & \sin(2\kappa) \\ \sin(2\kappa) & -\cos(2\kappa) \end{pmatrix}$

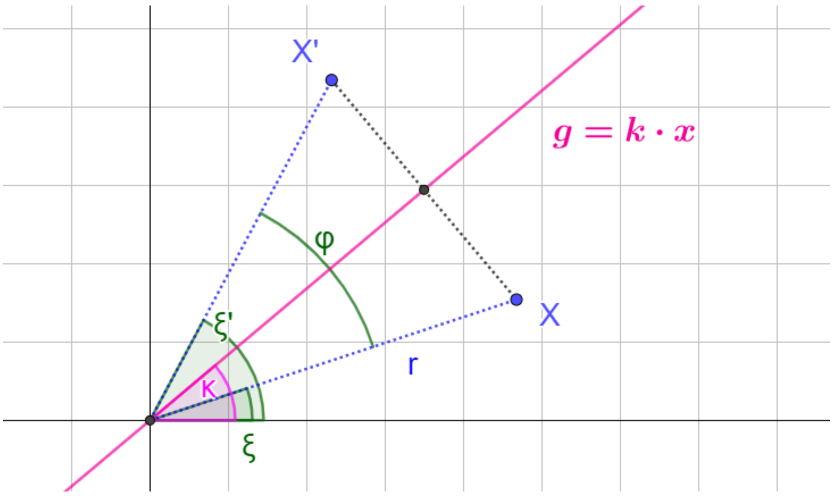


ABB. 8

Die Spiegelgerade g: $y = kx$ besitzt den Steigungswinkel $\kappa = \tan^{-1}(k)$.

Die Spiegelpunkte sind $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\xi) \\ r \cdot \sin(\xi) \end{pmatrix}$ bzw. $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\xi') \\ r \cdot \sin(\xi') \end{pmatrix}$.

Bezüglich den Winkel ξ, ξ' und dem Steigungswinkel κ ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\xi' - \kappa = \kappa - \xi \quad \Longrightarrow \quad \xi' = 2\kappa - \xi$$

$$X' = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\xi') \\ r \cdot \sin(\xi') \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\kappa - \xi) \\ \sin(2\kappa - \xi) \end{pmatrix}$$

und mit den trigonometrischen Summensätzen

$$X' - Z = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\kappa) \cdot \cos(\xi) + \sin(2\kappa) \cdot \sin(\xi) \\ \sin 2\kappa \cdot \cos(\xi) - \cos(2\kappa) \cdot \sin(\xi) \end{pmatrix}$$

$$= r \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\kappa) & \sin(2\kappa) \\ \sin(2\kappa) & -\cos(2\kappa) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\xi) \\ \sin(\xi) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\kappa) & \sin(2\kappa) \\ \sin(2\kappa) & -\cos(2\kappa) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\xi) \\ r \cdot \sin(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\kappa) & \sin(2\kappa) \\ \sin(2\kappa) & -\cos(2\kappa) \end{pmatrix} \cdot X$$

$$\rightarrow \boxed{S = \begin{pmatrix} \cos(2\kappa) & \sin(2\kappa) \\ \sin(2\kappa) & -\cos(2\kappa) \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{X' = S \cdot X = \begin{pmatrix} \cos(2\kappa) & \sin(2\kappa) \\ \sin(2\kappa) & -\cos(2\kappa) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\kappa) \cdot x + \sin(2\kappa) \cdot y \\ \sin(2\kappa) \cdot x - \cos(2\kappa) \cdot y \end{pmatrix}}$$

In homogenen Koordinaten

$$\boxed{X' = S \cdot X = \begin{pmatrix} \cos(2\kappa) & \sin(2\kappa) & 0 \\ \sin(2\kappa) & -\cos(2\kappa) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\kappa) \cdot x + \sin(2\kappa) \cdot y \\ \sin(2\kappa) \cdot x - \cos(2\kappa) \cdot y \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Diese Beziehung gilt auch in etwas komplizierteren Fällen.

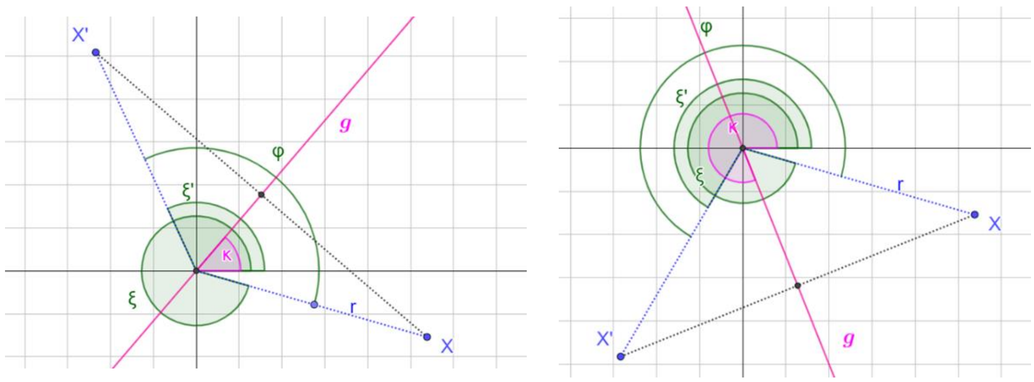


Abb. 9

Hier gilt $\xi' - \kappa = \kappa + (360° - \xi)$ bzw. $\kappa - \xi' = \xi - \kappa$, was im linken Fall auf $\xi' = 2\kappa - \xi + 360° \equiv 2\kappa - \xi$ und im rechten Fall auf $\xi' = 2\kappa - \xi$ führt. Auf Grund der Periodizität von Cosinus und Sinus bzgl. 360° ändert sich das Ergebnis dadurch nicht.

7.2 AUFGABEN

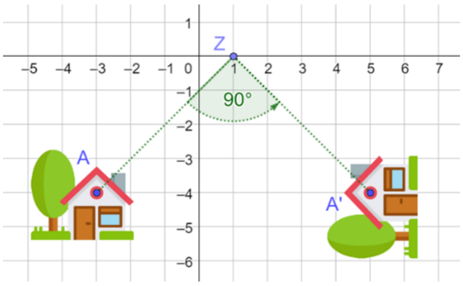
1 Drehe den Punkt $A(-5|-2)$ um 90° um den Drehpunkt $Z(1|0)$!

a) Drehmatrix D!

b) Translationsmatrizen T und T^{-1}!

c) Abbildungsmatrix $M = T^{-1} \cdot D \cdot T$

d) $A' = (T^{-1} \cdot D \cdot T) \cdot A$



Lösung:

$$M = T^{-1} \cdot D \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & +1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

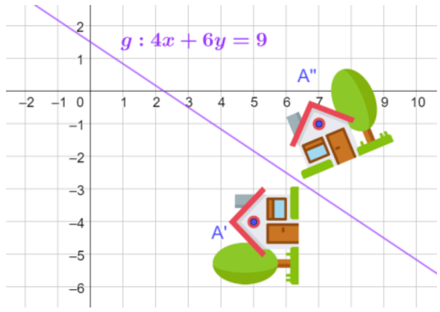
2 Spiegle den Punkt $A'(5|-4)$ an der Geraden g!

a) Spiegelmatrix S!

b) Translationsmatrizen T und T^{-1}!

c) Abbildungsmatrix $M = T^{-1} \cdot S \cdot T$

d) $A'' = (T^{-1} \cdot S \cdot T) \cdot A'$



Lösung:

$$g: y = -\frac{2}{3}x + \frac{3}{2} \Longrightarrow \kappa = \tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) \approx -33.69°$$

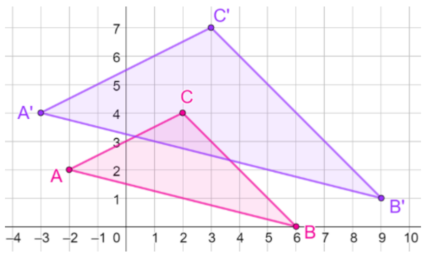
$$M = T^{-1} \cdot S \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & +1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.385 & -0.923 & 0 \\ -0.923 & -0.385 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.385 & -0.923 & 1.385 \\ -0.923 & -0.385 & 2.078 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} 0.385 & -0.923 & 1.385 \\ -0.923 & -0.385 & 2.078 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 Die beiden Dreiecke stehen im Verhältnis 3: 2. Zu bestimmen ist die Abbildungsmatrix M für beliebige Punkte P des Dreiecks ABC.

$ABC \rightarrow A'B'C'$

$P' = M \cdot P$, gesucht M!



Lösung:

$$M = T_2 \cdot Sk \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 Korrektur einer Bildverzerrung

Abb. 10: Optische Bildverzerrung (*Pexels*)

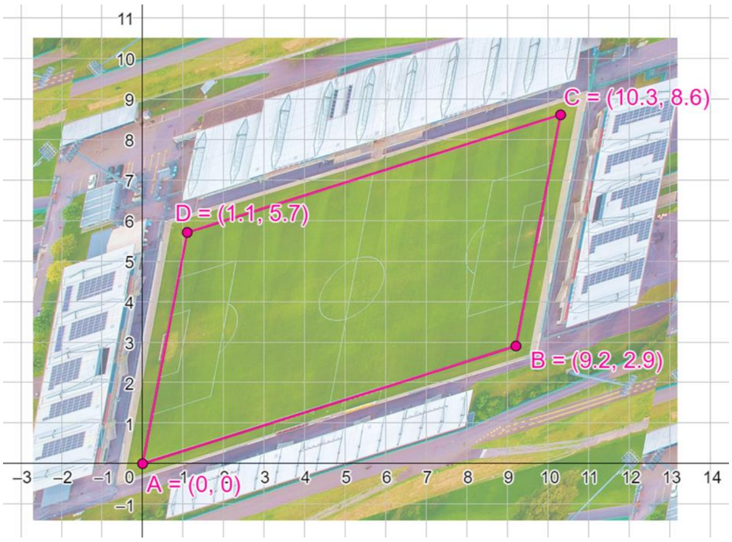


Abb. 11

Gegeben: Parallelogramm [$A(0|0)$ $B(9{,}2|2{,}9)$ $C(10{,}3|8{,}6)$ $D(1{,}1|5{,}7)$]

Gesucht: Korrigiere die Scherung → Rechteck $[A'(0|0)\ B'(x_B|0)\ C'(x_C|y_c)\ D'(0|y_D)]$

Lösung:

$$P' = Sh^{-1} \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & -\tan(\varphi_y) \\ -\tan(\varphi_x) & 1 \end{pmatrix} \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{11}{57} \\ -\frac{29}{92} & 1 \end{pmatrix} \cdot P$$

$\rightarrow A'(0|0)\quad B'(8{,}64|0)\quad C'(8{,}64|5{,}35)\quad D'(0|5{,}35)$

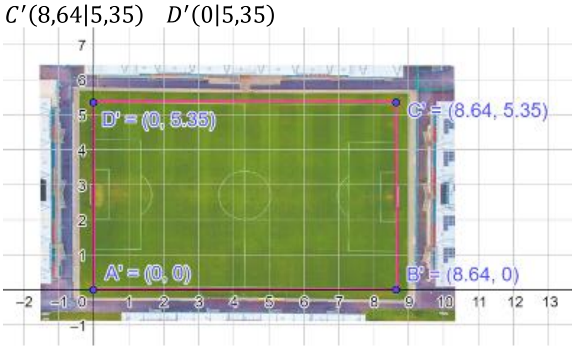


Abb. 12 (vergrößern)