Matrizen

Wirtschaftliche Anwendungen

Uhlmann Rudolf

Inhalt

Produktionsprozesse

(Aus https://wwwdid.mathematik.tu-darmstadt.de/.../lehrer/material/Bedarfsberechnung.pdf)

Verflechtungsdiagramm

Frau Weber backt hervorragende Kuchen und Torten. Heute will sie zwei verschiedene Kuchen (Obstkuchen (O), Mandelkuchen (M)) backen, dafür benötigt sie drei verschiedene Zutaten: Zucker, Mehl und Milch. In jeden der beiden Kuchen kommt eine andere Zutatenmenge.

Ihren Bedarf an Zutaten kann man mit einem Diagramm darstellen:

Verflechtungsdiagramm

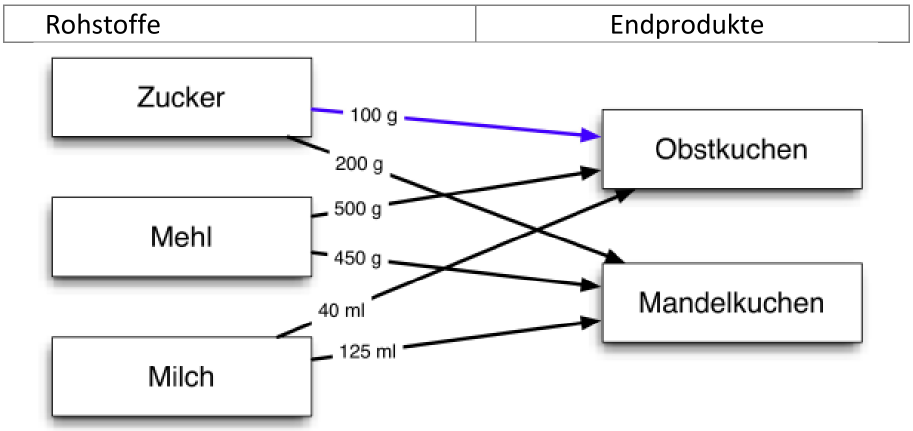


Abb. 1

Ebenso in einer Tabelle:

Rohstoff-Endprodukt-Tabelle

↱	E1 Obstkuchen	E1 Mandelkuchen
R1 Zucker	100	200
R2 Mehl	500	450
R3 Milch	40	125

Tabelle 1

Die sogenannte Bedarfsmatrix ergibt sich aus der Rohstoff-Endprodukt-Tabelle:

Bedarfsmatrix RE (Rohstoff-Endprodukt-Matrix)

$RE = \begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 500 & 450 \\ 40 & 125 \end{pmatrix}$ … Bedarfsmatrix für ein Endprodukt (1 ME = 1 Obstkuchen und 1 Mandelkuchen)

Der Rohstoffbedarf für 2 Obstküchen und 3 Mandelkuchen wäre dann

$$\vec{r} = RE \cdot \vec{m}$$

$$\vec{r} = RE \cdot \vec{m} = \begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 500 & 450 \\ 40 & 125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 2350 \\ 455 \end{pmatrix}$$

$\vec{r}$ … Rohstoffvektor , RE … Bedarfsmatrix (für 1 ME) , $\vec{m}$ … Mengenvektor

Aufgabe:

Eine Bestellung beläuft sich auf 3 Schokotorten, 2 Erdbeertorten und 1 Zitronentorte. Berechne mit Hilfe des gegebenen Verflechtungsdiagramms den dazu gehörenden Rohstoffvektor!

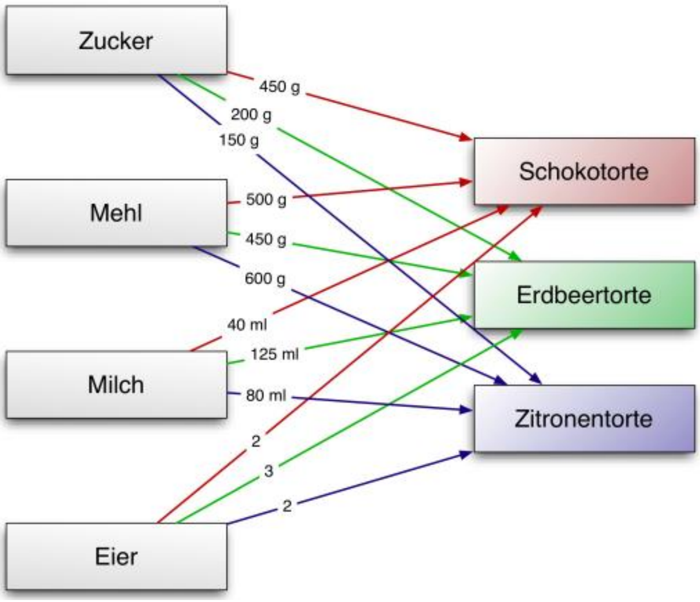


Abb. 2

Lösung: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1900 \\ 3000 \\ 450 \\ 15 \end{pmatrix}$

Mehrstufige Produktionsprozesse

Manchmal muss Frau Weber auch für mehrere Veranstaltungen etwas backen. Nächste Woche braucht Sie Kuchen und Torten für die Geburtstagsfeier ihrer Tochter und für die goldene Hochzeit ihrer Tante.

Rohstoffe	Zwischenprodukte	Endprodukte

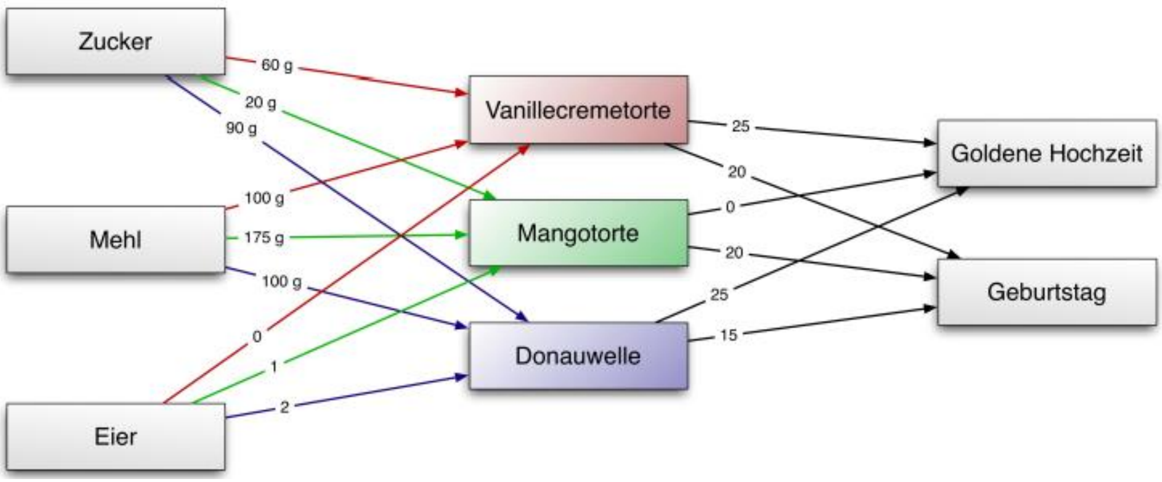


Abb. 3

1. Produktionsstufe	2. Produktionsstufe
RZ Rohstoff $\rightarrow$ Zwischenprodukt	***ZE*** Zwischenprodukt $\rightarrow$ Endprodukt

↱	Z1	Z2	Z3
R1	60	20	90
R2	100	175	100
R3	0	1	2

↱	E1	E2
Z1	25	20
Z2	0	20
Z3	25	15

Tabelle 2

Bedarfsmatrix RE

$$RE = RZ \cdot ZE = \begin{pmatrix} 60 & 20 & 90 \\ 100 & 175 & 100 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 0 & 20 \\ 25 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3750 & 2950 \\ 5000 & 7000 \\ 50 & 50 \end{pmatrix}$$

E_1: 3750 g Zucker ; 5000 g Mehl ; 50 Eier ... Goldene Hochzeit

E_2: 2950 g Zucker ; 7000 g Mehl ; 50 Eier ... Geburtstag

Aufgabe: Berechne den Rohstoffvektor für 2 Hochzeiten und 5 Geburtstage!

Lösung: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 22250 \\ 45000 \\ 350 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{Zucker} \\ \text{Mehl} \\ \text{Eier} \end{array}$

Leontief – Input-Output-Analyse

Wassily Leontief

Die Input-Output-Analyse ist eine Form volkswirtschaftlicher Gesamtrechnung.

Es ist das Verdienst von WASSILY LEONTIEF, Zusammenhänge verschiedener Bereiche der Volkswirtschaft mithilfe von Matrizen(gleichungen) mathematisch erfasst und aufbereitet zu haben.

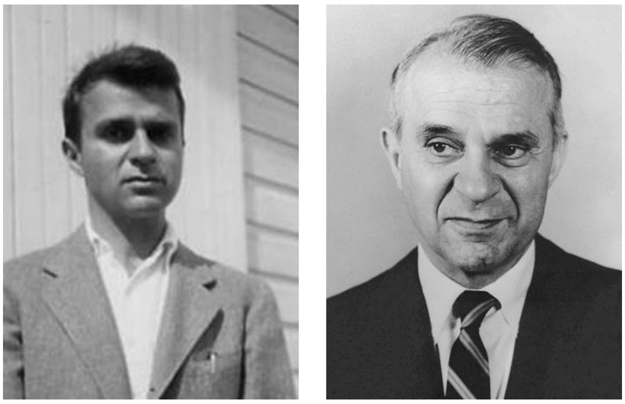


Abb. 4: Wassily Leontief, 1906-1999. Nobel-Preis für Wirtschaftswissenschaften 1973

Input-Output-Analyse

Beispiel

Gegeben sind das **Verflechtungsdiagramm** und die **Produktionsmatrix** einer Volkswirtschaft.

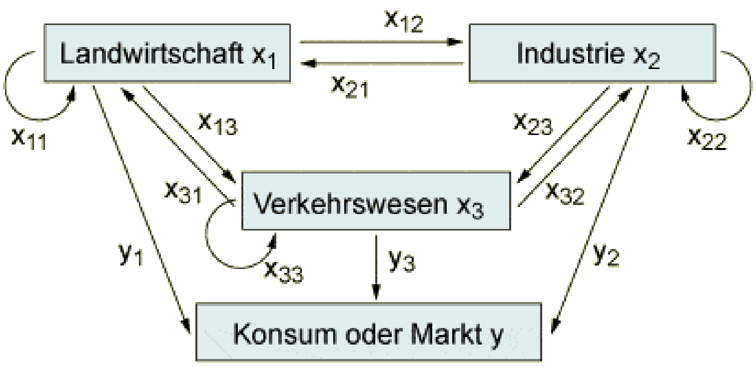


Abb. 5: Verflechtungsdiagramm (Gozintograph „Goes into“)

von->zu	Landwirtschaft	Industrie	Verkehr	**Markt**	**Gesamtproduktion**
Landwirtschaft	$x_{11} = 2$	$x_{12} = 2$	$x_{13} = 4$	$\boldsymbol{y_1 = 2}$	**10**
Industrie	$x_{21} = 4$	$x_{22} = 2$	$x_{23} = 2$	$\boldsymbol{y_2 = 6}$	**14**
Verkehr	$x_{31} = 4$	$x_{32} = 2$	$x_{33} = 2$	$\boldsymbol{y_3 = 4}$	**12**

Tabelle 3

Die Güterströme sind dabei z.B. in Mengeneinheiten pro Jahr angegeben. In den Zeilen steht der Output eines Sektors, in den Spalten der Input.

Aus der Produktionsmatrix errechnet sich die sogenannte **Technologie- oder Inputmatrix**, manchmal auch Verflechtungsmatrix genannt.

von->zu	Landwirtschaft	Industrie	Verkehr	**Markt**	**Gesamtproduktion**
Landwirtschaft	$x_{11} = \frac{2}{10}$	$x_{12} = \frac{2}{14}$	$x_{13} = \frac{4}{12}$	$\boldsymbol{y_1 = 2}$	**10**
Industrie	$x_{21} = \frac{4}{10}$	$x_{22} = \frac{2}{14}$	$x_{23} = \frac{2}{12}$	$\boldsymbol{y_2 = 6}$	**14**
Verkehr	$x_{31} = \frac{4}{10}$	$x_{32} = \frac{2}{14}$	$x_{33} = \frac{2}{12}$	$\boldsymbol{y_3 = 4}$	**12**

Tabelle 4

Die Technologiematrix (Inputmatrix: oranger Teil der Tabelle) gibt in den Spalten jeweils an, wie viel der jeweilige Sektor von den anderen Sektoren für eine (produzierte) Einheit als Input benötigt. Der Verkehrsbereich erhält von der Landwirtschaft 4/12, von der Industrie 2/12 und von sich selbst auch 2/12.

PRODUKTIONSMATRIX $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$ **TECHNOLOGIEMATRIX** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{2}{10} & \frac{2}{14} & \frac{4}{12} \\ \frac{4}{10} & \frac{2}{14} & \frac{2}{12} \\ \frac{4}{10} & \frac{2}{14} & \frac{2}{12} \end{pmatrix}$

Der Marktvektor beschreibt die externe Nachfrage des Marktes.

MARKTVEKTOR $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Der Produktionsvektor beschreibt wieviel produziert werden muss.

PRODUKTIONSVEKTOR $x = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 12 \end{pmatrix}$

Die Technologiematrix sowie Produktionsvektor und Marktvektor erfüllen die

Grundgleichung der Input-Output-Analyse nach Leontief.

$$A \cdot x + y = x$$

Grundsätzliche Fragestellungen:

a) Der Marktvektor y ist bekannt. Wie viel muss insgesamt x produziert werden?

Geg. y, ges. $x \rightarrow$ Lösung: $x = (I - A)^{-1} \cdot y$

b) Der Produktionsvektor x ist bekannt. Wie viel davon wird für den Markt y produziert?

Geg. x, ges. $y \rightarrow$ Lösung: $(I - A) \cdot x = y$

Lösungsschritte:

$$
\begin{aligned}
A \cdot x + y &= x \mid -A \cdot x \\
x - A \cdot x &= y \\
I \cdot x - A \cdot x &= y \\
(I - A) \cdot x &= y \quad \mid (I - A)^{-1} \cdot \\
(I - A)^{-1} \cdot (I - A) \cdot x &= (I - A)^{-1} \cdot y \\
x &= (I - A)^{-1} \cdot y
\end{aligned}
$$

$(I - A)^{-1}$ … **LEONTIEF-INVERSE** (falls existent)

Übergangsmatrix

Austauschprozesse

Beispiel

Eine mittelgroße Stadt betreibt ein Rent-a-Bike-System mit drei Stationen. Station A befindet sich am Bahnhof, Station B am Rathaus und Station C am Stadtwald, einem oft genutzten Naherholungsgebiet. Durch Langzeitbeobachtung haben die für das Verleihsystem zuständigen Mitarbeiter ermittelt, wie sich die Verteilung der Fahrräder an den verschiedenen Stationen im Verlauf eines Tages ändert. Dazu haben Sie über zwei Monaten hinweg für jedes Fahrrad festgehalten, an welcher Station sich das Rad bei der Öffnung der Stationen um 7 Uhr und bei der Schließung der Stationen um 21 Uhr befand. Die relativen Häufigkeiten eines Transfers im Lauf eines Tages haben Sie in Form eines Graphen dargestellt:

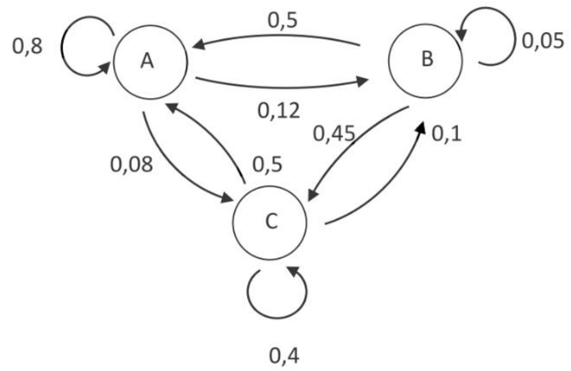


Abb. 6: Gozintograph

Abb. 7 (@pixabay)

Übergangsmatrix

Der Austauschprozess startet mit einem Startvektor x und endet nach einem Schritt in einem ersten Endzustandsvektor x'. Der Übergang wird durch die Übergangsmatrix beschrieben.

Startvektor x

$$x = (a \quad b \quad c) =^{zB} (50 \quad 40 \quad 10)$$

Übergangsmatrix P

$$P =^{zB} \begin{pmatrix} 0,80 & 0,12 & 0,08 \\ 0,50 & 0,05 & 0,45 \\ 0,50 & 0,10 & 0,40 \end{pmatrix}$$

↱	A	B	C	
A	0,80	0,12	0,08	Σ = 1
B	0,50	0,05	0,45	Σ = 1
C	0,50	0,10	0,40	Σ = 1

Endzustandsvektor x'

$$x' = (a' \quad b' \quad c') = x \cdot P =^{zB} (50 \quad 40 \quad 10) \cdot \begin{pmatrix} 0,80 & 0,12 & 0,08 \\ 0,50 & 0,05 & 0,45 \\ 0,50 & 0,10 & 0,40 \end{pmatrix} = (65 \quad 9 \quad 26)$$

Entwicklung in Austauschprozessen

Ist die Verteilung von Objekten auf verschiedene Zustände durch einen Verteilungsvektor x festgelegt und sind die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zuständen durch eine Übergangsmatrix P gegeben, so erhält man den Verteilungsvektor x' für die neue Verteilung der Objekte durch

$$x \cdot P = x'$$

Die Entwicklung kann zu einem stabilen Endzustand führen.

$$x_n \cdot P = x_{n+1}$$

$$x_0 \cdot P^n = x_n$$

Endzustandsvektor

$$x_\infty = \lim_{x\to\infty} x_n = \lim_{x\to\infty} x_0 \cdot P^n$$

Z.B.:

$$(50 \quad 40 \quad 10) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}12 & 0{,}08 \\ 0{,}5 & 0{,}05 & 0{,}45 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} = (65 \quad 9 \quad 26)$$

$$(50 \quad 40 \quad 10) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}12 & 0{,}08 \\ 0{,}5 & 0{,}05 & 0{,}45 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}^2 = (69{,}5 \quad 10{,}9 \quad 19{,}7)$$

$$(50 \quad 40 \quad 10) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}12 & 0{,}08 \\ 0{,}5 & 0{,}05 & 0{,}45 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}^{n\to\infty} \to (71{,}4 \quad 10{,}9 \quad 17{,}7)$$

Der sich einstellende Endzustand ist etwa A = 71 , B = 11 , C = 18

Aufgaben

1 Leontief

Drei Zweigbetriebe A, B und C eines Konzerns sind nach dem LEONTIEF-Modell miteinander verknüpft. Die gegenwärtigen Produktionsdaten sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

	A	B	C	Markt	Produktion
A	80	30	30	60	200
B	20	60	10	60	150
C	0	30	70	0	100

a) Stelle die Technologiematrix in einem Gozintographen dar!

b) Der Marktvektor wird wegen geänderten Situation am Markt auf $\begin{pmatrix} 41 \\ 42 \\ 5 \end{pmatrix}$ abgeändert.

Mit welcher Produktion ist bei gleichbleibenden Rahmenbedingungen der geplante Marktvektor zu realisieren?

[Lsg: Wenn durch den Betrieb A 150, durch B 110 und durch C 90 Produkteinheiten hergestellt werden, kann die neue Forderung des Marktes erfüllt werden]

2 Computermodelle

Für 3 verschiedene Computermodelle werden die Herstellungskosten (in €) für Einzelteile angegeben:

	PCX	*PCY*	*PCZ*
Mainboard	65	90	152
Grafikkarte	35	77	210
Prozessor	83	124	257
Festplatte	61	82	104

Ein Händler bestellt 150 Stück von PCX, 90 Stück von PCY und 45 Stück von PCZ, während ein anderer Händler 210 Stück von PCX, 125 Stück von PCY und 30 Stück von PCZ bestellt.

Ermittle die Gesamtkosten für jeden Händler, nach Einzelteilen getrennt, mit Matrizenrechnung!

Lsg:

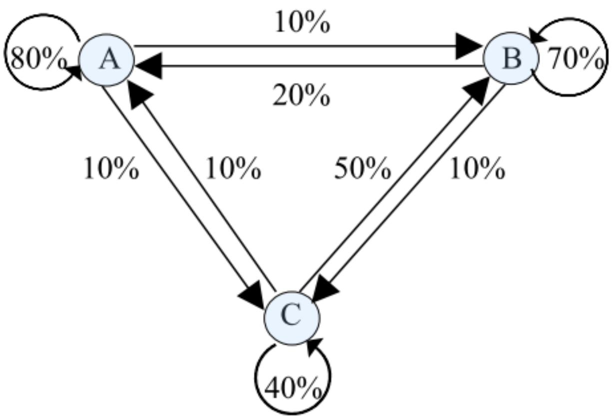
Einzelteile	Mainboards	Grafikkarten	Prozessoren	Festplatten
Händler 1	24.690,00 €	21.630,00 €	35.175,00 €	21.210,00 €
Händler 2	29.460,00 €	23.275,00 €	40.640,00 €	26.180,00 €

3 Marktforschung

Übergangsmatrix

Ein Institut untersucht den Wechsel von Käufern zwischen den Zeitschriften A, B und C in einem vorher festgelegten Zeitraum. Zu Beginn habe A 1000 , B 4000 und C 2000 Käufer.

Das Ergebnis der Untersuchung ist im folgenden Gozintograph dargestellt:



a) Erstelle eine Übergangsmatrix:

↱	A	B	C
A			
B			
C			

b) Wie viele Käufer hat die jeweilige Zeitschrift am Ende des Untersuchungszeitraums?

c) Wie viele Käufer hat die jeweilige Zeitschrift nach 5; 10; 50 Zeiträumen, falls die Übergangsmatrix sich nicht verändert?

d) Gibt es eine "Grenzverteilung" (stationäre Verteilung) der Käufer?

Lsg: b) (1800,3900,1300) ; d) (3250,2750,1000)

4 Pharmazeutische Industrie

Ein Pharmakonzern stellt aus den Chemikalien C1 bis C3 zunächst die Grundmischungen G1 bis G4 her, die dann zu den Medikamenten M1 und M2 weiterverarbeitet werden. Der Produktionsprozess lässt sich durch die beiden nachfolgenden Tabellen beschreiben.

↱	G1	G2	G3	G4
C1	5	4	2	6
C2	6	2	8	1
C3	2	4	6	2

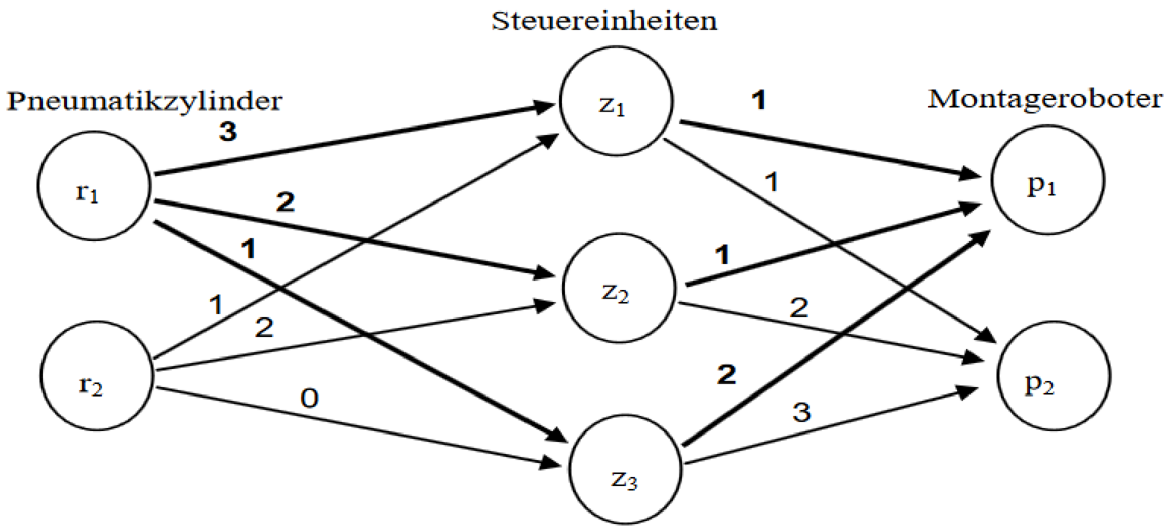
↱	M1	M1
G1	1	3
G2	4	6
G3	7	2
G4	3	2

Der Pharmakonzern möchte 30 ME vom Medikament M1 und 50 ME vom Medikament M2 herstellen. Berechne, wie viel ME der drei Chemikalien jeweils benötigt werden (Rohstoffbedarf).

(Lsg: Für die Produktion von 30 ME des Medikaments M1 und 50 ME des Medikaments M2 werden 4 340 ME der Chemikalie C1, 4 590 ME der Chemikalie C2 und 4 280 ME der Chemikalie C3 benötigt.)

5 Montageroboter (poenitz-net.de)


Eine Firma stellt zwei Montageroboter p_1 und p_2 unter Verwendung von drei Steuereinheiten z_1, z_2 und z_3 her. Für die Fertigung der Steuereinheiten werden zwei verschiedene Pneumatikzylinder r_1 und r_2 benötigt. Das untenstehende Verflechtungsdiagramm gibt an, wie viele Steuereinheiten für die Herstellung von jeweils einem Montageroboter und wie viele Pneumatikzylinder für die Herstellung von jeweils einer Steuereinheit benötigt werden.



a. Stelle den Zusammenhang zwischen dem Produktionsvektor dem Zwischenproduktvektor und dem Rohstoffvektor durch zwei Matrizengleichungen dar.

b. Wie viele Pneumatikzylinder r_1 und r_2 werden für die Herstellung von 15 Montagerobotern p_1 und 12 Montagerobotern p_2 benötigt?

Lösungen:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{z} \quad \text{bzw.} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{p}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 225 \\ 105 \end{pmatrix}$$

6 Industriebetrieb

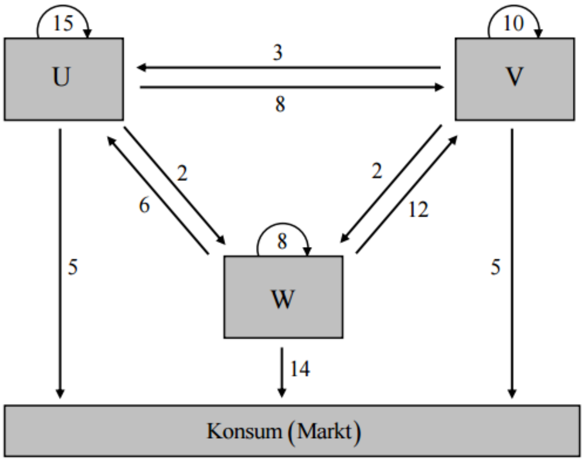


Abb. 8 (Foto von David McBee von Pexels)

Die drei Teilbetriebe eines Industrieunternehmens sind nach dem Leontief-Modell untereinander und mit dem Markt verflochten. Das folgende Diagramm zeigt die gegenseitige Verflechtung der einzelnen Teilbetriebe und die Gesamtproduktion.

a. Erstelle aus dem Verflechtungsdiagramm die Produktionsmatrix!
b. Bestimme die Technologiematrix (Verflechtungsmatrix) T.
c. Zu einem anderen Zeitpunkt beträgt der Marktvektor $y = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 1{,}5 \\ 14 \end{pmatrix}$.

   Berechne den zugehörigen Produktionsvektor x!

Lsg: Produktionsvektor (20,10,30)