

# Sphärische Geometrie

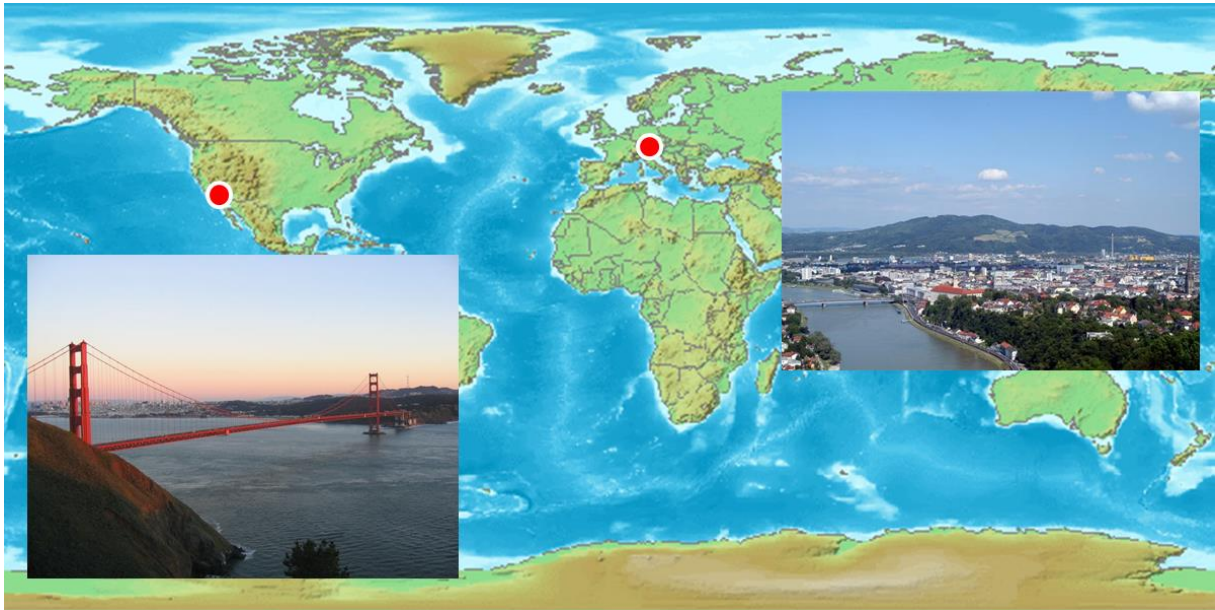


ruhl

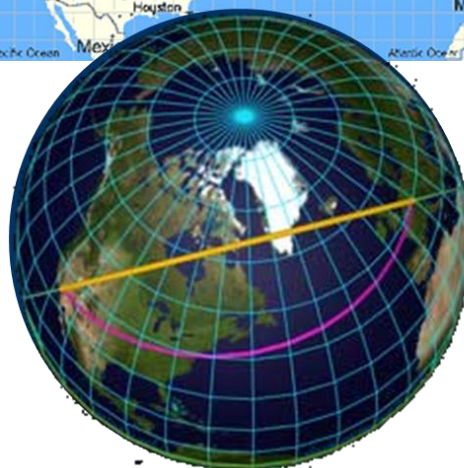
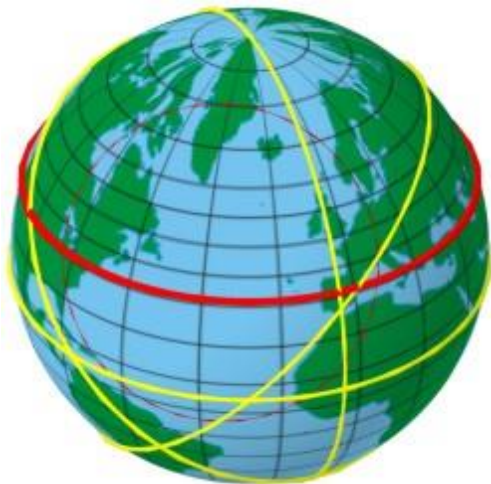
## INHALT

Wo geht's hier nach San Francisco? .....	2
Geometrie auf der Kugel .....	3
Kugelkoordinaten .....	3
Sphärisches Dreieck .....	4
Der Seiten-Cos-Satz .....	5
Der Winkel-Cos-Satz .....	6
Der Sin-Satz .....	6
Geraden – Vergleich sphärischer mit euklidischer Geometrie .....	7
Kugel-Zwei- und -Dreieck .....	7
Geometrie der Erdkugel .....	8
Orthodrome .....	9
Orthodrome – Sphärischer Abstand .....	9
Orthodrome – Kurswinkel .....	9
Loxodrome .....	9
Anhang .....	11
Flächeninhalt des SpHärischen Dreiecks (aus Wikipedia) .....	11
Aufgaben .....	12
Chicago – Taschkent .....	12
Linz – San Francisco .....	12
1874 Kabelverbindung Europa-Amerika .....	13
Kurswinkel Berlin – Melbourne .....	13
Flight from Sheffield to Petropavlovsk .....	14
قبلة Qibla .....	14

## WO GEHT'S HIER NACH SAN FRANCISCO?

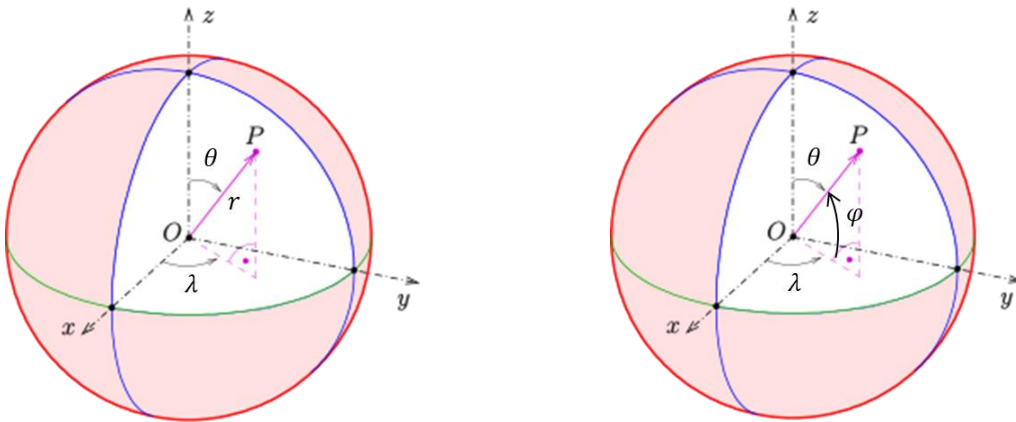


Die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist eine gerade Linie. Auf der Kugel sind allerdings alle Verbindungen an der Oberfläche gekrümmt. Die kürzesten Verbindungen zweier Orte auf einer Kugeloberfläche liegen auf Großkreisen. Großkreise sind Kreise auf der Kugeloberfläche, deren Mittelpunkt gleichzeitig Kugelmittelpunkt ist.



# GEOMETRIE AUF DER KUGEL

## KUGELKOORDINATEN



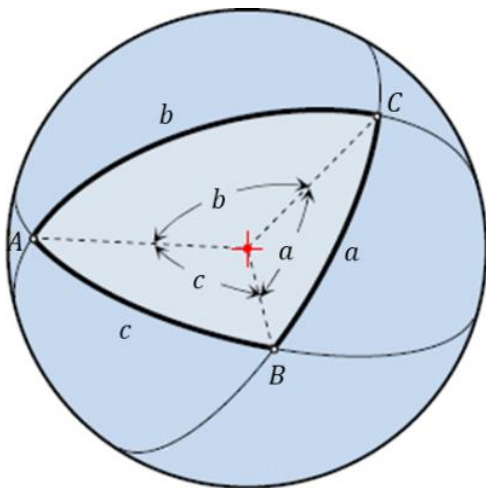
Die Abbildung zeigt einen Punkt  $P$  mit den Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \lambda)$ . Die Bezeichnung der Kugelkoordinaten ist leider nicht einheitlich. In der Mathematik und in der Physik wird ein Punkt  $P$  durch die folgenden drei Koordinaten Radius, Polarwinkel und Azimutwinkel festgelegt:

- $r$ , der **Radius**, ist der Abstand des Punktes  $P$  vom Mittelpunkt  $O$ .
- $\theta$ , der **Polarwinkel** oder *Poldistanzwinkel*, ist der Winkel zwischen der Polrichtung und der Strecke  $OP$  gezählt von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  (bzw.  $0$  bis  $\pi/2$ ). In der Geographie ist der Komplementärwinkel  $\varphi$  als **geographische Breite** gebräuchlich.
- $\lambda$ , der **Azimutwinkel** ist der Winkel zwischen der Bezugsrichtung und der Orthogonalprojektion der Strecke  $OP$ , gezählt von  $-180^\circ$  bis  $180^\circ$  (bzw.  $-\pi/2$  bis  $\pi/2$ ). Die Bezugsrichtung ist in der Geographie durch den Meridian durch Greenwich festgelegt. Die Bezeichnung mit  $\lambda$  kommt ebenfalls aus der Geographie, wo sie als **geographische Länge** bezeichnet wird, ist aber in der Mathematik und Physik unüblich.
- $\sin(\varphi) = \cos(\theta)$  ;  $\cos(\varphi) = \sin(\theta)$

In der Geographie beschränkt man sich auf Länge  $\lambda$  und Breite  $\varphi$ , da der Radius mit ca. 6370 km als vorgegeben angesehen wird. Ist der Radius mit  $r = 1$  festgelegt, so spricht man von der **Einheitskugel**.

**Ist es nicht näher beschrieben, so ist im Folgenden immer die Einheitskugel gemeint!**

## SPHÄRISCHES DREIECK

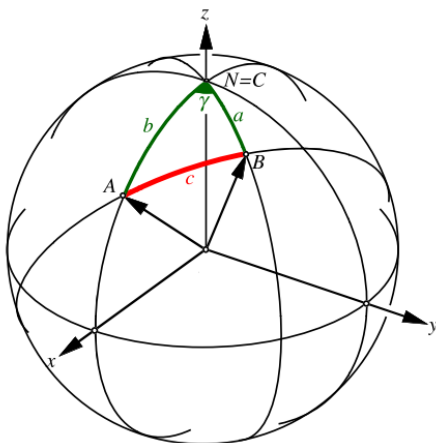


Ein zwischen drei Punkten ( $A, B, C$ ) einer Kugel aufgespannte sphärisches Dreieck besteht aus drei Großkreisbögen (Orthodrome) ( $a, b, c$ ). Im Falle der **Einheitskugel** sind das die **Bogenmaße der entsprechenden Zentralwinkel** (siehe Abb.).

Ist ein sphärisches Dreieck gegeben, so kann man die Kugel immer so drehen, dass ein Eckpunkt als 'Nordpol' (z.B.  $C$ ) und ein Punkt (z.B.  $A$ ) am 'Nullmeridian' gedacht werden kann. Der dritte Punkt ( $B$ ) liegt dann irgendwo.

Die Seite  **$b$**  ist das **Bogenmaß des Polarwinkels von  $A$** , die Seite  **$a$**  das **Bogenmaß des Polarwinkels von  $B$**  und  **$c$**  ist der **sphärische Abstand**, also die 'Entfernung'  $\widehat{AB}$  und gleichzeitig der Winkel  $\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  im Bogenmaß.

Der Winkel  $\gamma$  bei  $C$  ist gleichzeitig der **Azimutwinkel  $\lambda_B$  von  $B$** .



Die Eckpunkte haben die **Kugel-Koordinaten**  $(r|\theta|\lambda)$

$$A = (1|b|0)$$

$$B = (1|a|\lambda_B)$$

$$C = (1|0|0)$$

Die **kartesischen Koordinaten**  $(x|y|z)$  sind dann

$$A = ( \sin(b) | 0 | \cos(b) )$$

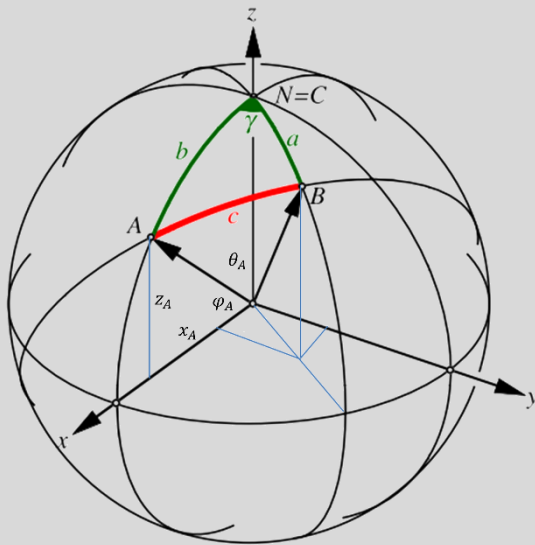
$$B = ( \sin(a) \cdot \cos(\gamma) | \sin(a) \cdot \sin(\gamma) | \cos(a) )$$

$$C = ( 0 | 0 | 1 )$$



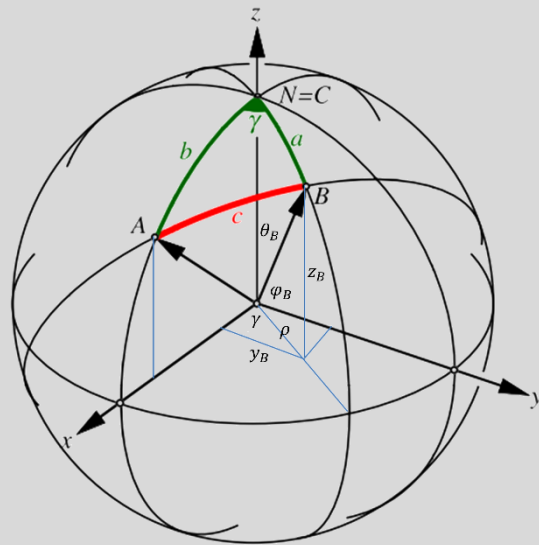
## BEGRÜNDUNGEN

*A kartesisch*



$$\begin{aligned}x_A &= \cos(\varphi_A) = \sin(\theta_A) = \sin(b) \\y_A &= 0 \\z_A &= \sin(\varphi_A) = \cos(\theta_A) = \cos(b)\end{aligned}$$

*B kartesisch*



$$\begin{aligned}\rho &= \cos(\varphi_B) = \sin(\theta_B) = \sin(a) \\ \sin(\gamma) &= \frac{y_B}{\rho} \quad ; \quad \cos(\gamma) = \frac{x_B}{\rho} \\ x_B &= \rho \cdot \cos(\gamma) = \sin(a) \cdot \cos(\gamma) \\ y_B &= \rho \cdot \sin(\gamma) = \sin(a) \cdot \sin(\gamma) \\ z_B &= \sin(\varphi_B) = \cos(a)\end{aligned}$$

Mit der Vektorformel für das skalare Produkt ergibt sich

$$\cos(c) = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}|} = \dots = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\gamma)$$

Durch zyklische Vertauschung ergeben sich alle 3 Seiten-Cos-Sätze.

## DER SEITEN-COS-SATZ

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\gamma)$$

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(b) = \cos(c) \cdot \cos(a) + \sin(c) \cdot \sin(a) \cdot \cos(\beta)$$

**Bemerkung:**  $a, b, c$  sind Winkel bzw. Entfernungen auf der Einheitskugel.  $c$  entspricht der Entfernung AB auf der Einheitskugel und muss gegebenenfalls noch mit dem Kugelradius  $R$  multipliziert werden.

Ohne Herleitung seien noch der **Winkel-Cos-Satz** sowie der **Sin-Satz** erwähnt.

---

#### DER WINKEL-COS-SATZ

$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(c)$$

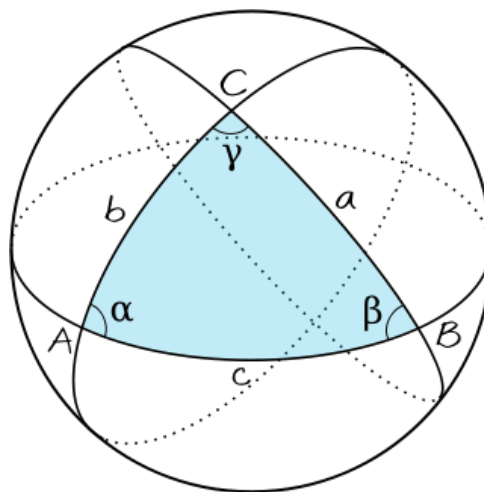
$$\cos(\alpha) = -\cos(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\gamma)\cos(a)$$

$$\cos(\beta) = -\cos(\gamma)\cos(\alpha) + \sin(\gamma)\sin(\alpha)\cos(b)$$

---

#### DER SIN-SATZ

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)}$$

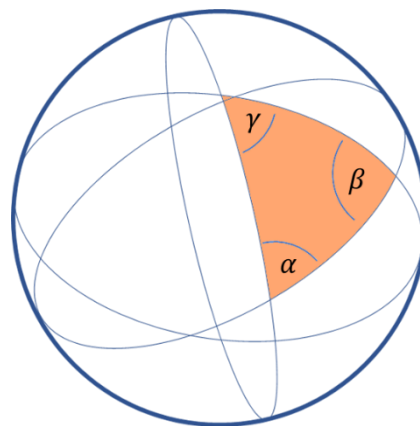
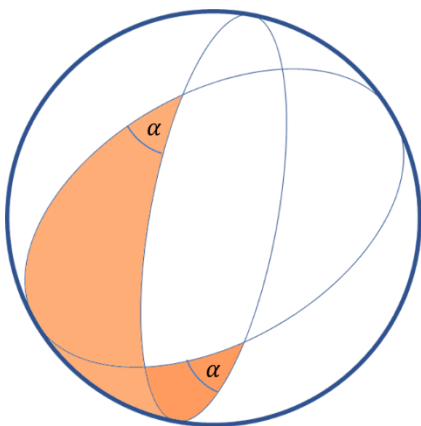


## GERADEN – VERGLEICH SPHÄRISCHER MIT EUKLIDISCHER GEOMETRIE

Die Strecke ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte, die Gerade deren Verlängerung. In diesem Sinn haben Geraden in der Ebene und auf der Kugel unterschiedliche Eigenschaften.

Euklidische Geometrie der Ebene	Sphärische Geometrie
Geraden sind Punktfolgen	Geraden sind Punktfolgen
Zwei voneinander verschiedene Geraden haben höchstens einen gemeinsamen Punkt.	Zwei voneinander verschiedene S-Geraden haben genau zwei gemeinsame Punkte.
Durch jeden Punkt der Ebene gibt es zu jeder Geraden, die diesen Punkt nicht enthält, genau eine Parallele.	Es existieren keine parallelen Geraden.
Durch zwei Punkte wird genau eine Gerade bestimmt	Durch zwei nichtdiametrale Punkte wird genau eine Gerade bestimmt; durch zwei diametrale Punkte gibt es unendlich viele Geraden.
Es gibt beliebig lange Strecken. Auf jedem Strahl mit dem Anfangspunkt $P$ gibt es zu jeder nichtnegativen reellen Zahl $a$ genau einen Punkt $A$ mit $a =  PA $ .	Jede Strecke hat höchstens die Länge $\pi R$ . Ist $P$ ein Punkt der Sphäre, so existiert kein Punkt $A$ mit $ PA  > \pi R$ .

## KUGEL-ZWEI- UND -DREIECK



Ein Kugelzweieck wird von zwei Großkreisen („Geraden“), ein Kugeldreieck von drei Großkreisen begrenzt.



Der **Flächeninhalt** eines **Kugelzweiecks** ist proportional seines Öffnungswinkels  $\alpha$  Teil der Gesamtoberfläche  $4r^2\pi$  der Kugel.

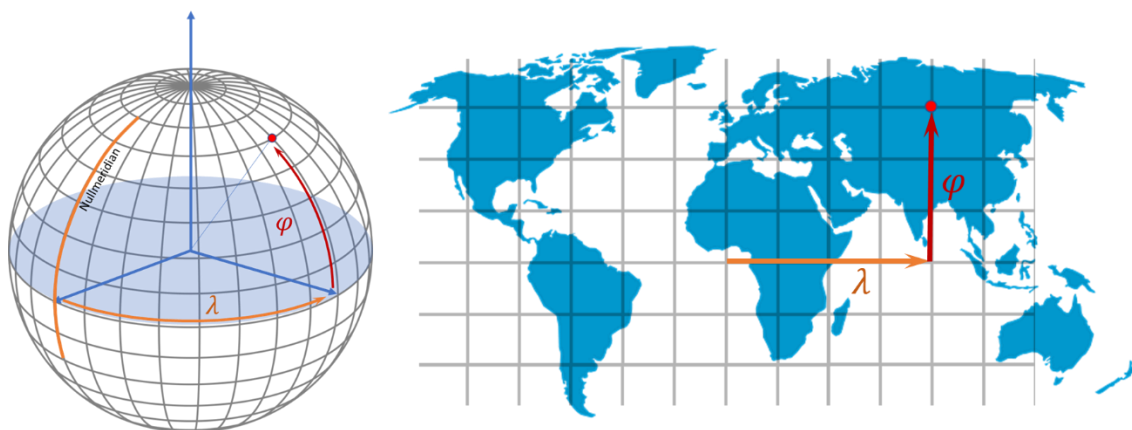
$$A_{\zeta} = \frac{4r^2\pi}{360^\circ} \cdot \alpha = \frac{4r^2\pi}{2\pi} \cdot \hat{\alpha} = 2r^2 \cdot \hat{\alpha}$$

Der **Flächeninhalt** eines **Kugeldreiecks** lässt sich aus den Winkeln  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  und  $\hat{\gamma}$  des Dreiecks im Bogenmaß und dem Kugelradius  $r$  berechnen.

$$A_{\Delta} = (\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} - \pi) \cdot r^2$$

(Herleitung siehe »Anhang«)

## GEOMETRIE DER ERDKUGEL



$\lambda$  ... geographische Länge vom Null-Meridian nach Osten

$\varphi$  ... geographische Breite vom Äquator aus am Ortsmeridian nach Norden

z.B. Linz (  $48.3^\circ\text{N}$  ;  $14.3^\circ\text{O}$  ) , also  $\varphi_L = +48,3^\circ$  und  $\lambda_L = +14,3^\circ$

z.B. São Paulo (  $23.5^\circ\text{S}$  ;  $46.6^\circ\text{E}$  ) , also  $\varphi_{SP} = -23.5^\circ$  und  $\lambda_{SP} = +46.6^\circ$

## ORTHODROME

Die Orthodrome ist die kürzeste Verbindungslinie zweier Orte entlang eines Großkreises.

### ORTHODROME – SPHÄRISCHER ABSTAND

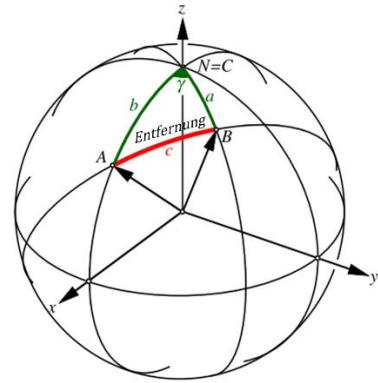
Für den **sphärischen Abstand**  $E_{AB}$  zwischen  $A$  und  $B$  entlang der Orthodrome ergibt sich aus dem Seiten-Cos-Satz

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\gamma)$$

$$\text{wobei } c = e, b = \frac{\pi}{2} - \varphi_A, a = \frac{\pi}{2} - \varphi_B, \gamma = \Delta\lambda$$

$$\cos(c) = \sin(\varphi_B) \cdot \sin(\varphi_A) + \cos(\varphi_B) \cdot \cos(\varphi_A) \cdot \cos(\Delta\lambda)$$

Auf der Erde ergibt sich die **Entfernung**  $E_{AB}$  durch Multiplikation von  $c$  (Bogenmaß) mit dem Erdradius  $r$  !



$$\text{Entfernung } E_{AB} = r \cdot \cos(c) = 6370\text{km} \cdot [\sin(\varphi_B) \cdot \sin(\varphi_A) + \cos(\varphi_B) \cdot \cos(\varphi_A) \cdot \cos(\Delta\lambda)]$$

Aufgaben im »Anhang

### ORTHODROME – KURSWINKEL

Der Kurswinkel ist der Winkel zwischen Nordrichtung und Zielrichtung. Er wird immer ausgehend von der Nordrichtung im Uhrzeigersinn angegeben.

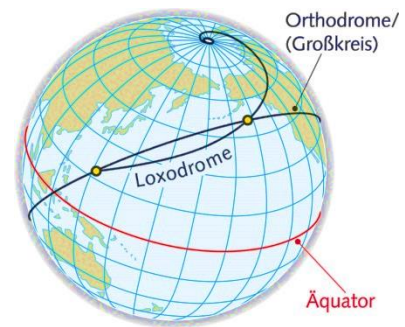
Die Kurswinkel bei Start  $\alpha$  und Ziel  $\beta$  lassen sich mit den Sinus-Sätzen ermitteln.

$$\text{Kurswinkel : } \sin(\alpha) = \frac{\sin(\Delta\lambda) \cdot \cos(\varphi_2)}{\sin(e)} \quad \text{bzw.} \quad \sin(\beta) = \frac{\sin(\Delta\lambda) \cdot \cos(\varphi_1)}{\sin(e)}$$

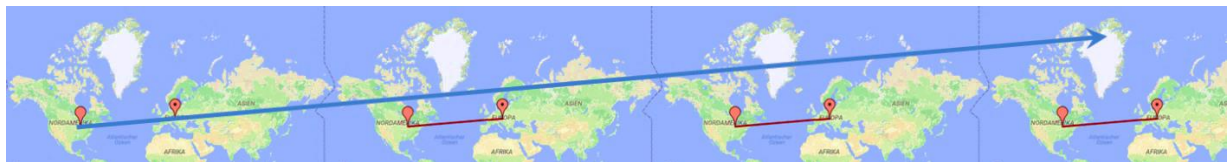
Aufgaben im »Anhang

## LOXODROME

Mit der Loxodrome bewegt man sich auf konstantem Kompass-Kurs. Sie ist die gerade Linie auf einer Mercator-Landkarte. Mit Ausnahme der W-O-Loxodrome entlang eines Breitengrades führen alle Loxodrome zu einem der beiden Pole. Die Meridian-Loxodrome führen direkt zum Pol, die anderen nähern sich spiralförmig-asymptotisch an.



Die Loxodrome ist nie kürzer als die Orthodrome. In den meisten Fällen gibt es viele loxodrome Verbindungen zweier Punkte auf dem Globus, wenn man mehrfache Umrundungen der Erde mit einbezieht.



Da die Loxodrome zwischen zwei Orten wesentlich länger als die Orthodrome sein kann, wird in der Praxis auf längeren Strecken auch nicht auf der Loxodromen gefahren. Um trotzdem nach dem Kompass fahren zu können wird die Orthodrome in Abschnitte aufgeteilt, in denen dann jeweils mit konstantem Kurs auf der Loxodromen gefahren wird.

Zur Berechnung der Länge einer loxodromen Entfernung ist Integral- und Differenzialrechnung nötig. Ausnahme ist die Bewegung entlang eines Breiten- oder Längengrades.

Aufgaben im »Anhang

## ANHANG

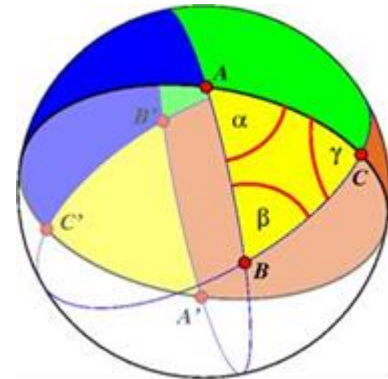
### FLÄCHENINHALT DES SPHÄRISCHEN DREIECKS (aus WIKIPEDIA)

Der Flächeninhalt  $A_D$  eines *Kugeldreiecks* lässt sich aus den Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  des *Dreiecks* (im **Bogenmaß**) und dem Kugelradius  $r$  berechnen:

$$A_D = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \cdot r^2$$

Dieser Zusammenhang leitet sich folgendermaßen her:

Die drei durch die Eckpunkte eines *Dreiecks* ABC bestimmten Geraden unterteilen die Kugeloberfläche in acht *Dreiecke* bzw. vier Gegendreieckspaare. Das in der Abbildung grün eingefärbte *Dreieck* bildet mit dem gelb eingefärbten *Dreieck* ABC ein Zweieck mit dem Öffnungswinkel  $\beta$ . Die blau und rot eingefärbten *Dreiecke* bilden mit dem Gegendreieck A'B'C' Zweiecke mit den Öffnungswinkeln  $\alpha$  bzw.  $\gamma$ .



Für die Flächeninhalte der Zweiecke gilt:

$$(I) A_\alpha = 2\alpha \cdot r^2$$

(Analog für die Zweiecke mit den Öffnungswinkeln  $\beta$  und  $\gamma$ .)

Für die Flächeneinhalte  $A_b$  des blauen,  $A_g$  des grünen und  $A_r$  des roten *Dreiecks* gilt:

$$A_b = A_\alpha - A_D$$

$$A_g = A_\beta - A_D$$

$$A_r = A_\gamma - A_D$$

Zusammen mit dem gelben Gegendreieck A'B'C' füllen das blaue, das gelbe und das rote *Dreieck* die Hälfte der Kugeloberfläche aus:

$$\frac{A_K}{2} = A_b + A_g + A_r + A_D$$

Setzt man (I) ein, ergibt sich:

$$\frac{A_K}{2} = (A_\alpha - A_D) + (A_\beta - A_D) + (A_\gamma - A_D) + A_D = A_\alpha + A_\beta + A_\gamma - 2A_D$$

Mit den Gleichungen zur Berechnung der Kugeloberfläche und der Kugelzweiecke erhält man:

$$\frac{4\pi r^2}{2} = 2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 - 2A_D$$

Für  $A_D$  ergibt sich also:

$$A_D = \alpha r^2 + \beta r^2 + \gamma r^2 - \pi r^2 = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \cdot r^2$$

Auf der Einheitskugel mit dem Radius 1 gilt also:

$$A_D = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Die Summe  $(\alpha + \beta + \gamma) - \pi$  wird als sphärischer Exzess bezeichnet.

## AUFGABEN

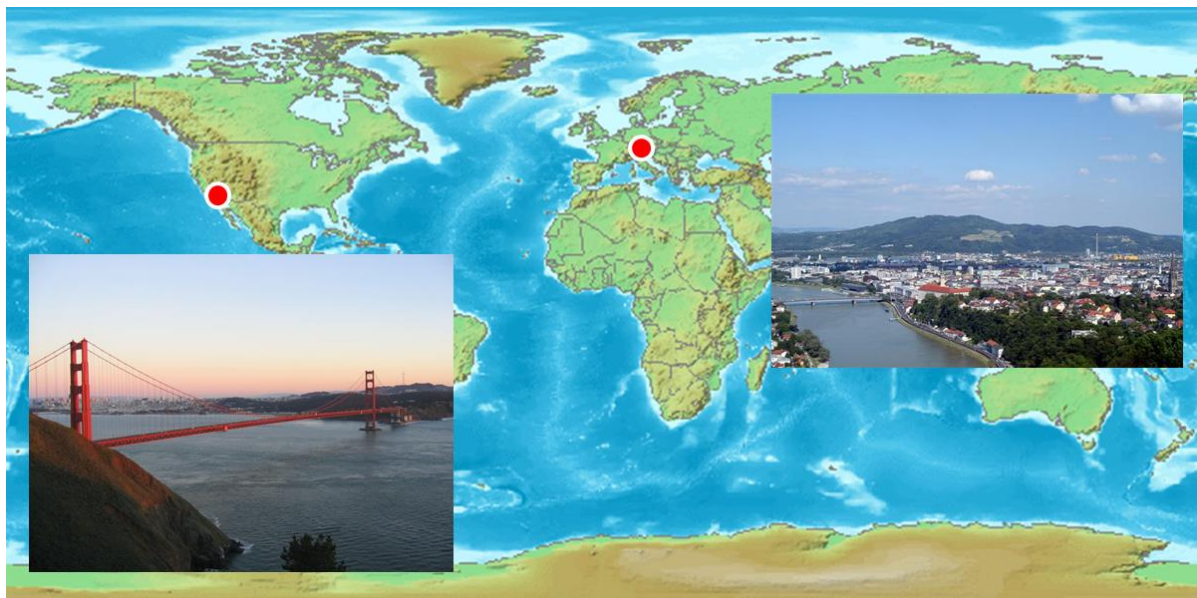
### CHICAGO – TASCHKENT

Vergleiche die orthodrome Entfernung und die Länge der Loxodromen zwischen Chicago (89°W,41°N) und Taschkent (69°O,41°N)



[Lösung: 10630,16.5°;13260,90°]

### LINZ – SAN FRANCISCO



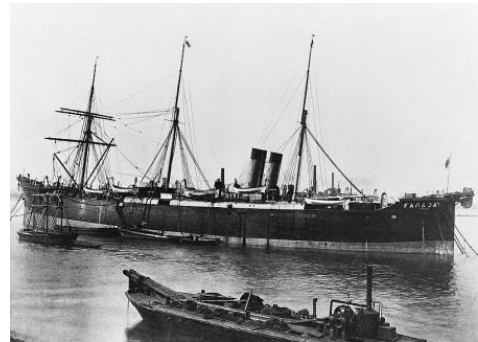
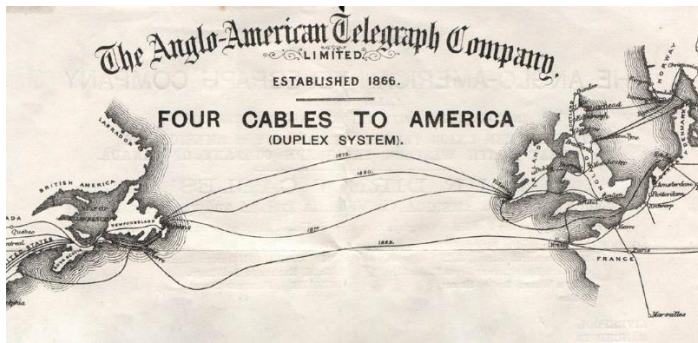
Ermittle die Koordinaten der beiden Städte und berechne die kürzeste Entfernung (Luftlinie).

[Lösung: ~9.530 km]



---

## 1874 KABELVERBINDUNG EUROPA-AMERIKA



Die im Jahr 1874 von der Insel Valentia ( $\varphi_1 = 51,5^\circ N$ ,  $\lambda_1 = 10,4^\circ W$ ) nach Neufundland ( $\varphi_2 = 47,7^\circ N$ ,  $\lambda_2 = 53,4^\circ W$ ) von den Brüdern Siemens verlegte Kabelverbindung von Europa nach Amerika hatte eine Länge von 1850 Seemeilen. Vergleiche diese Länge mit der orthodromen Entfernung beider Orte! [Lösung :  $\Delta L \approx 345 \text{ km}$ ]

---

## KURSWINKEL BERLIN – MELBOURNE

Berechne für die Route von Berlin ( $\lambda_1 = 13,4^\circ O$ ,  $\varphi_1 = 52,5^\circ N$ ) nach Melbourne ( $\lambda_2 = 144,7^\circ O$ ,  $\varphi_2 = 38,5^\circ S$ ) die orthodrome Entfernung sowie den Anfangs- und den Endkurswinkel!

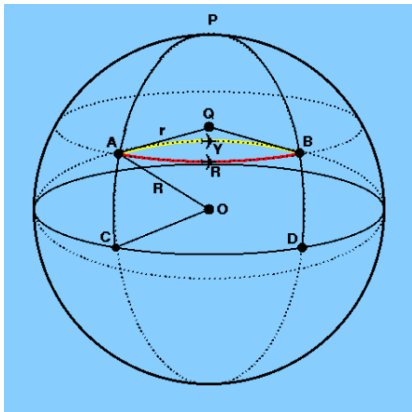


„Der Kurswinkel (auch Richtungswinkel, in der Schweiz Azimut oder Artilleriepromille bzw. engl. Azimuth) ist ein Begriff aus der Navigation und bezeichnet den Winkel zwischen Nordrichtung und Zielrichtung. Er wird immer ausgehend von der Nordrichtung im Uhrzeigersinn angegeben.“  
(Wikipedia)

[Lösungen:  $\sim 16000 \text{ km}$ ,  $\sim 86^\circ$ ,  $\sim -50^\circ$ ]



## FLIGHT FROM SHEFFIELD TO PETROPAVLOVSK

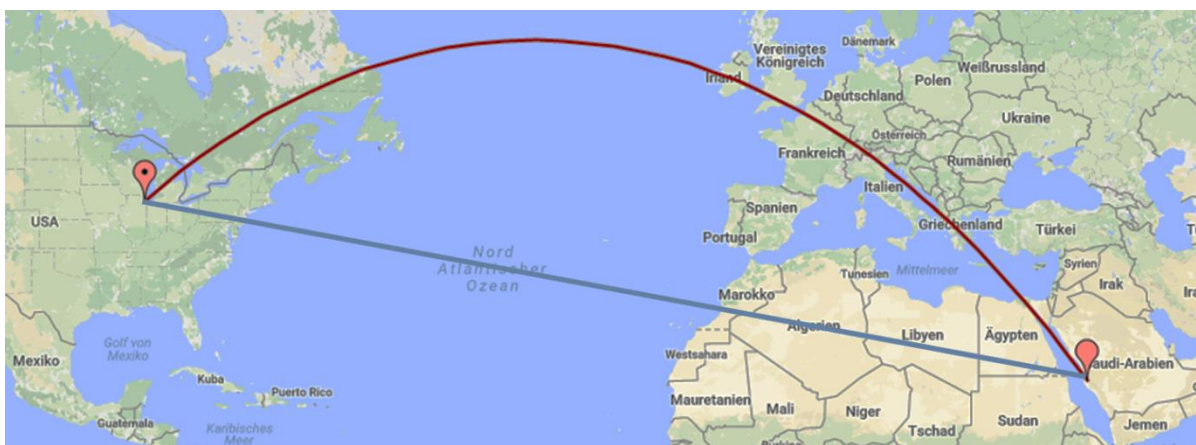


How much longer will it take to fly from Sheffield to Petropavlovsk in Russia along the parallel compared to the great circle route? Assume that Sheffield and Petropavlovsk are at the same latitude ( $53^{\circ}23' \text{ N}$ ), the longitude of Sheffield and Petropavlovsk are  $1^{\circ}28' \text{ W}$  and  $158^{\circ}42' \text{ E}$ , respectively, and the plane is flying at 500 knots.

[ $5741\text{sm}-4318\text{sm}=1423\text{sm}$  ;  $\Delta t \sim 3\text{h}$ ]

## قِبْلَة QIBLA

Die Qibla ist jene Richtung, in der ein gewaltiger Turm, der über der Kaaba ( $21^{\circ}25' \text{ N}$ ,  $39^{\circ}49' \text{ O}$ ) errichtet sei, gesehen werde könne.



Als Gebetsrichtung kommen zwei Möglichkeiten in Betracht. Die Richtung der Orthodrome oder die Richtung der Loxodrome. Wir berechnen die Gebetsrichtung für eine Moschee in Chicago ( $41^{\circ}53'N$ ,  $87^{\circ}38'W$ )

- a) Bestimme den Kurs der Loxodrome nach Mekka mit Hilfe einer Mercatorkarte (z.B. GoogleMaps)!
- b) Berechne den Anfangskurs der Orthodrome nach Mekka!
- c) Auf beiden Linien kommt man nach Mekka. In welcher Richtung würde man den gedachten Turm in Mekka sehen? Welche gibt also die Richtige Qibla an?

[Lösung:  $100.8;48.6$ ]