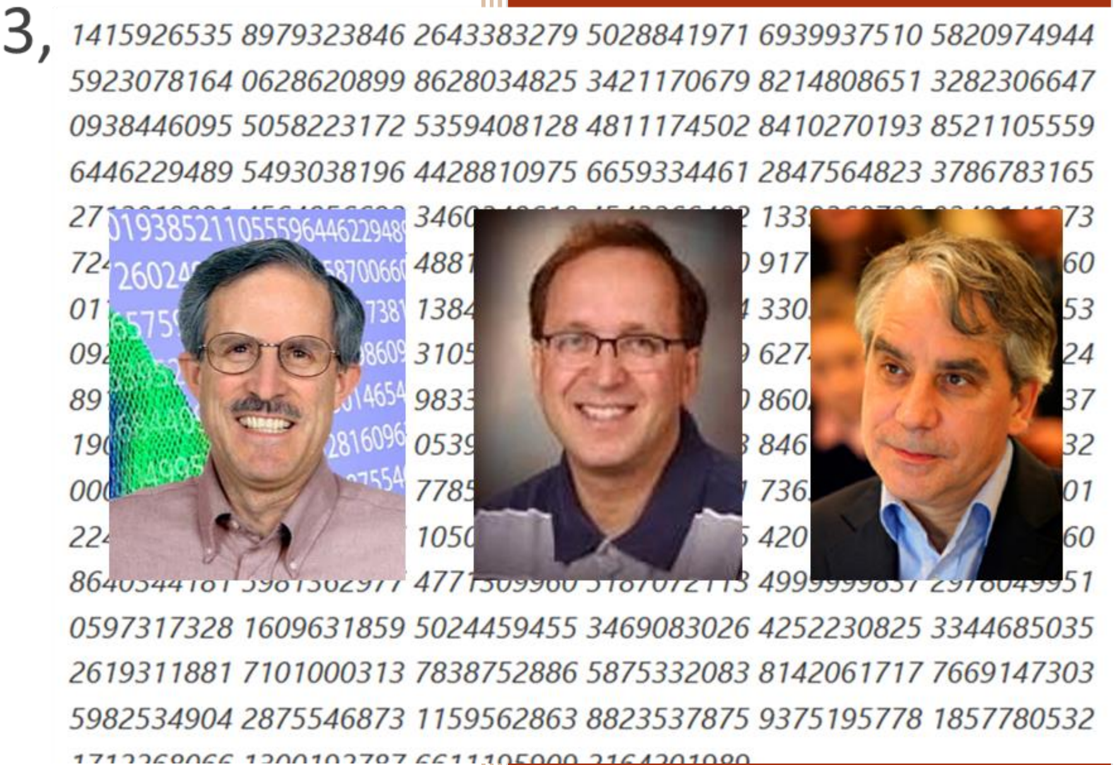
Die BBP-Reihenentwicklung von π



UHLMANN

Inhalt

1 Die Kreiszahl π

Sie misst den Kreisumfang. Bei 1 m Durchmesser beträgt er etwas mehr als 3 m. Wieviel mehr genau war lange Zeit unklar. Eine Quelle aus dem alten Ägypten erklärt π über den Flächeninhalt. Im sogenannten „Papyrus-Rhind“ steht, dass ein Kreis mit Durchmesser 9 und ein Quadrat mit Seitenlänge 8 gleiche Fläche haben.

$$A_{\bigcirc} = \left(\frac{9}{2}\right)^2 \pi \quad = \quad 8^2 = A_{\square} \Longrightarrow \pi = 3 + \frac{13}{81} = 3{,}16049$$

bzw. in Anlehnung an die damalige Schreibweise

$$\pi = 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$$

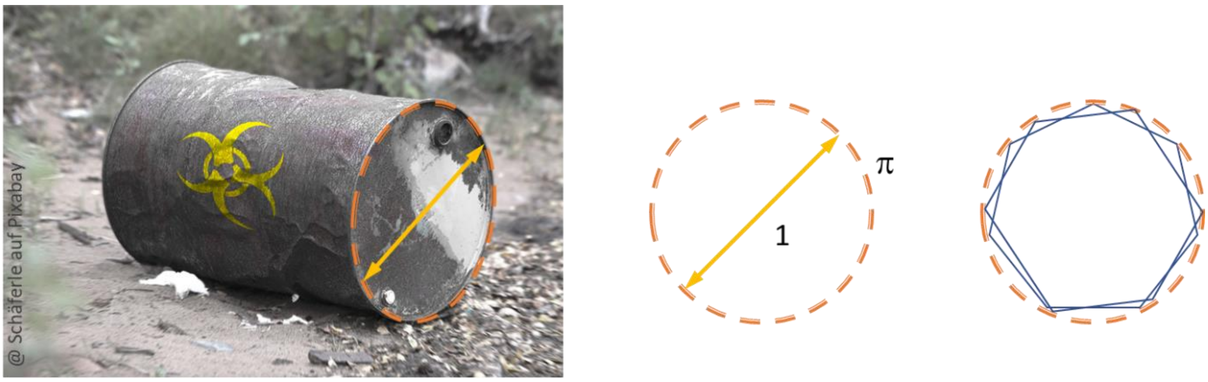


Abb. 1

Archimedes verwendete regelmäßige Vielecke als Näherung an den Kreis. Er kam bis zum 96-Eck und damit zur Abschätzung

$$3{,}1408450 \approx 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70} \approx 3{,}1428571$$

Nimmt man davon den Mittelwert $3 + \frac{141}{994} \approx 3{,}1418511$, so beträgt der Fehler nur mehr etwa $0{,}08\,‰$.

Etliche Mathematiker danach versuchten sich ebenfalls an dieser Methode und schraubten die Genauigkeit weiter nach oben. Ludolph van Ceulen gelang 1596 auf Basis eines 2^{62}-Ecks die ersten 35 Stellen von π zu berechnen.

Eine Zeit lang wurde π in unendlichen Kettenbrüchen oder Produkten dargestellt.

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{\ddots}}}} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots \text{ John Wallis (1655)}$$

1682 entdeckte dann Gottfried Wilhelm Leibnitz die nach ihm benannte Reihe

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \mp \cdots,$$

die allerdings unter indischen Mathematikern schon seit dem 15. Jhd. bekannt war.

Leonhard Euler zeigte in seiner im Jahre 1748 erschienenen Introductio in Analysin Infinitorum mehrere Reihenentwicklungen bezüglich π, darunter auch die Summe der reziproken Quadratzahlen

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$$

Der Nachteil aller genannten Formeln für π ist ihre langsame Konvergenz.

	π nach 100 Schritten	**π nach 1000 Schritten**
Wallis	3,110945167	3,138458898
Leibniz	3,151493401	3,142591654
Euler	3,132076532	3,140638056

Heutzutage kennt man Formeln, die viel schneller konvergieren. Dazu gehört die 1995 von Simon Plouffe zusammen mit Peter Borwein und David Harold Bailey entdeckte Reihenentwicklung

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right),$$

auf der viele moderne Methoden beruchen. So ist heute (2021) die Kreiszahl π auf 62 831 853 071 796 Dezimalstellen genau berechnet. Die Rechenzeit dafür betrug 108 Tage.

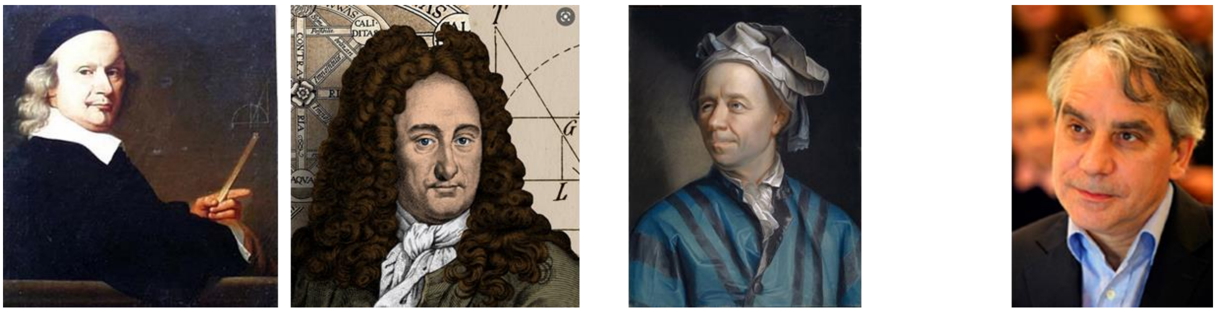


Abb. 2: Wallis, Leibniz, Euler, Plouffe

2 Die BBP-Reihenentwicklung von π

BBP steht für die drei Protagonisten **B**ailey, **B**orwein und **P**louffe.

Abb. 3: Harold Bailey, Peter Borwein, Simon Plouffe

Ihre Entdeckung war ein intelligentes Zusammenspiel in Sinne von Trial-and-Error zwischen den Mathematikern mit ihrem profunden mathematischen Knowhow und dem vom Computer abzuarbeitenden PSQL-Algorithmus. Dieser Algorithmus ist befähigt, ganzzahlige Zusammenhänge reeller Zahlen der Art $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\,, a_i \in \mathbb{Z}, x_i \in \mathbb{R}$ aufzudecken. Bekannt war bereits eine Reihendarstellung von $\ln(2) = 0{,}693147\ ...$ Daraufhin wurde Ähnliches für π gesucht und nach vielen vergeblichen Versuchen ergab die Eingabe $\left(\sum \frac{1}{16^k(8k+1)}\,, \sum \frac{1}{16^k(8k+2)}\,, \ldots, \sum \frac{1}{16^k(8k+8)}\,, \pi\right)$ die Computerantwort $(-4, 0, 0, 2, 1, 1, 0, 1)$. Das bedeutet

$$-4 \cdot \sum \frac{1}{16^k(8k+1)} + 0 \cdot \sum \frac{1}{16^k(8k+2)} + \cdots + 1 \cdot \sum \frac{1}{16^k(8k+6)} + \cdots + 0 \cdot \sum \frac{1}{16^k(8k+6)} + \pi = 0$$

wobei Σ für $\Sigma_{k=0}^{\infty}$ steht. Daraus ergibt sich die Reihenentwicklung

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$$

Die Konvergenzgeschwindigkeit ist sagenhaft.

$k =$	**5**	**3.141592653**2280875347343780355362044695585280121978019348144223...
	10	**3.141592653589793**1296141705640413448588164526762962816158956223...
	20	**3.1415926535897932384626433832**513626158819093165184179085553650...
	30	**3.1415926535897932384626433832795028841971**575021545964550913037...
	50	**3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445...**
$\pi =$		**3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445...**

Die Entdeckung gelang zwar dem Computer, der Beweis für die Richtigkeit dieser Formel musste aber extra erbracht werden.

3 Der Beweis

Der Beweis besteht aus zwei Teilen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right) = \int_0^1 \frac{64 - 32x^3 - 16x^4 - 16x^5}{16 - x^8}\,dx = \pi\,.$$

In *1. Teil* wird gezeigt, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right) = \int_0^1 \frac{64 - 32x^3 - 16x^4 - 16x^5}{16 - x^8}\,dx$$

und im *2. Teil* weiter

$$\int_0^1 \frac{64 - 32x^3 - 16x^4 - 16x^5}{16 - x^8}\,dx = \pi$$

Teil 1

Satz

$$\int_0^1 \frac{64 - 32x^3 - 16x^4 - 16x^5}{16 - x^8}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$$

Beweis

Bei Integralen zwischen 0 und 1 mit einem Nenner der Form $a - x^p$ können folgende Umformungen vollzogen werden.

$$\int_0^1 \frac{64 - 32x^3 - 16x^4 - 16x^5}{16 - x^8}\,dx = \int_0^1 \frac{16 \cdot (4 - 2x^3 - x^4 - x^5)}{16 - x^8}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{4 - 2x^3 - x^4 - x^5}{1 - \frac{x^8}{16}}\,dx = \int_0^1 \boxed{\frac{1}{1 - \left(\frac{x^8}{16}\right)}}\,(4 - 2x^3 - x^4 - x^5)\,dx$$

Der markierte Term kann als Summe einer unendlichen geometrische Reihe mit

$$|q| = \left|{}^{x^8}\!/_{16}\right| < 1$$

aufgefasst werden. Dies deshalb, da sich das Integral nur auf x-Werte zwischen 0 und 1 bezieht und dort die Werte für $\left|{}^{x^8}\!/_{16}\right|$ kleiner als 1 sind.

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{x^8}{16}\right)} = s_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^8}{16}\right)^n$$

Eingesetzt ins ursprüngliche Integral ergibt das

$$\int_0^1 \frac{1}{1-\left(\frac{x^8}{16}\right)}(4-2x^3-x^4-x^5)\,dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^8}{16}\right)^k (4-2x^3-x^4-x^5)\,dx\,.$$

Durch Anwendung der Summenregel
$\int\sum dx = \sum\int dx \mathrel{\widehat{=}} \int(a+b+\cdots)\,dx = \int a\,dx + \int b\,dx + \cdots =$ folgt

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^8}{16}\right)^k (4-2x^3-x^4-x^5)\,dx \;= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^1 \frac{x^{8k}}{16^k}(4-2x^3-x^4-x^5)\,dx\right) = \cdots$$

und weiter die Integration der einzelnen Summanden.

$$\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^1 \frac{4x^{8k}}{16^k}dx - \int_0^1 \frac{2x^{8k+3}}{16^k}dx - \int_0^1 \frac{x^{8k+4}}{16^k}dx - \int_0^1 \frac{x^{8k+5}}{16^k}dx\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{16^k}\left[\frac{x^{8k+1}}{8k+1}\right]_0^1 - \frac{2}{16^k}\left[\frac{x^{8k+4}}{8k+4}\right]_0^1 - \frac{1}{16^k}\left[\frac{x^{8k+5}}{8k+5}\right]_0^1 - \frac{1}{16^k}\left[\frac{x^{8k+6}}{8k+6}\right]_0^1\right) = \cdots$$

ergibt letztendlich die gewünschte Summe

$$\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right) \quad \blacksquare$$

Teil 2

Zu zeigen ist

$$\int_0^1 \frac{64-32x^3-16x^4-16x^5}{16-x^8}\,dx = \pi$$

Zuerst wird der Integrand als Summe zweier Brüche dargestellt (Partialbruchzerlegung).

Satz

$$\frac{64-32x^3-16x^4-16x^5}{16-x^8} = \frac{4x}{x^2-2} - \frac{4x-8}{x^2-2x+2}$$

Beweis

$$\frac{4x}{x^2-2} - \frac{4x-8}{x^2-2x+2} = \frac{4x(x^2-2x+2)-(4x-8)(x^2-2)}{(x^2-2)(x^2-2x+2)} =$$

$$= \frac{16x-16}{(x^2-2)(x^2-2x+2)} = \cdots$$

Erweitert man obigen Bruchterm folgendermaßen, so erhält man

$$\dots = \frac{16(x-1)}{(x^2-2)(x^2-2x+2)} \cdot \frac{(x^2+2)(x^2+2x+2)}{(x^2+2)(x^2+2x+2)} = \frac{16x^5+16x^4+32x^3-64}{x^8-16} =$$

$$= \frac{64-32x^3-16x^4-16x^5}{16-x^8}$$

Somit ist gezeigt, dass

$$\int_0^1 \frac{64-32x^3-16x^4-16x^5}{16-x^8}\,dx = \int_0^1 \frac{4x}{x^2-2} - \frac{4x-8}{x^2-2x+2}\,dx \quad \blacksquare$$

In dieser Form lässt sich das Integral elementar berechnen:

Satz

$$\int_0^1 \frac{4x}{x^2-2} - \frac{4x-8}{x^2-2x+2}\,dx = \pi$$

Beweis

Der zweite Bruchterm wird nochmal geteilt, wodurch drei Integrale entstehen.

$$\int_0^1 \frac{4x}{x^2-2} - \frac{4x-8}{x^2-2x+2}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{4x}{x^2-2} - \frac{4x-4}{x^2-2x+2} + \frac{4}{x^2-2x+2}\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{2x}{x^2-2}\,dx - 2\int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx + 4\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx =$$

$$= 2[\ln|x^2-2|]_0^1 - 2[\ln|x^2-2x+2|]_0^1 + 4[\arctan(x-1)]_0^1 =$$

$$= 2\cdot(0-\ln(2)) - 2\cdot(0-\ln(2)) + 4\cdot\left(0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \pi \quad \blacksquare$$

4 Die 1-millionste Stelle von π

Die BBP-Reihe hat noch einen entscheidenden Vorteil. Sie liefert viele hintere Stellen von π, ohne die Stellen davor zu kennen. Und zwar in der hexadezimalen Darstellung von π.

$$\pi_{16} = 3{,}243f6a8885a3 \ldots \mathrel{\widehat{=}} 3 + \frac{2}{16} + \frac{4}{16^2} + \frac{3}{16^3} + \frac{15}{16^4} + \cdots$$

Das Hexadezimalsystem zählt folgendermaßen:

dez	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f	10
hex	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
dez	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1a	1b	1c	1d	1e	1f	20
hex	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
dez	20	…	99	9a	9b	…	ff	100	…								
hex	32	…	153	154	155	…	255	256	…								

Zuerst vorneweg einige Schreibweisen erklärt.

Definition
Sei $r \in \mathbb{R}_0^+$ $(r \geq 0)$, dann ist
1) $\lfloor r \rfloor$ der Ganzteil von r. (Gaußklammer)
2) $\{r\} \coloneqq r - \lfloor r \rfloor$ der Bruchteil von r.

Beispiel: $\overbrace{31415}^{Ganzteil},\overbrace{926535..}^{Bruchteil}$

$$r = 31415{,}926535.. \Longrightarrow \lfloor 31415{,}926535.. \rfloor = 31415 \text{ und } \{31415{,}926535..\} = 0{,}926535..$$

Satz (Rechenregeln)
Seien $r, s \in \mathbb{R}_0^+, m \in \mathbb{N}$

$$\{r + s\} = \{\{r\} + \{s\}\}$$
$$\{m \cdot r\} = \{m \cdot \{r\}\}$$

Nehmen wir an, wir brauchen die Dezimalen von π nach der 5. Stelle $(d = 5)$.
Im dekadischen System wird dazu π mit 10^5 multipliziert und der Ganzteil weggeschnitten.

$$\pi = 3{,}14159265358..$$
$$10^5 \cdot \pi = 314159{,}265358..$$
$$\{10^5 \cdot \pi\} = \{314159{,}265358..\} = 0{,}265358..$$

Im hexadezimalen System wird dazu π mit 16^5 multipliziert und der Ganzteil weggeschnitten. Zu bemerken ist, dass $16_{10} \mathrel{\widehat{=}} 10_{16}$

$$\{16^5 \cdot \pi\} = \{314159{,}265358..\} = 0{,}265358.. \qquad \text{dezimale Schreibweise}$$

$$\{10^5 \cdot \pi\} = \{3243f6, a885a3..\} = 0, a885a3.. \qquad \text{hexadezimale Schreibweise}$$

Die Berechnungen für das Hexadezimalsystem werden hier aber der Vertrautheit wegen in dezimaler Notation durchgeführt.

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right) =$$

$$= 4 \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{16^{-k}}{8k+\mathbf{1}}}_{S_1} - 2 \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{16^{-k}}{8k+\mathbf{4}}}_{S_4} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{16^{-k}}{8k+\mathbf{5}}}_{S_5} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{16^{-k}}{8k+\mathbf{6}}}_{S_6} =$$

$$= \boxed{4 \cdot S_1 - 2 \cdot S_4 - S_5 - S_6} \quad ; \quad S_{\boldsymbol{m}} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16^{-k}}{8k+\boldsymbol{m}}$$

Um die Stellen nach der 5. Hexadezimalstelle ($d = 5$) zu erhalten wird, $\{16^5 \cdot \pi\}$ berechnet.

$$\{16^5 \cdot \pi\} = \{4 \cdot \{16^5 \cdot S_1\} - 2 \cdot \{16^5 \cdot S_2\} - \{16^5 \cdot S_5\} - \{16^5 \cdot S_6\}\} = \tag{4.1}$$

Die einzelnen Summen $16^d S_m$ werden geteilt.

$$16^5 \cdot S_m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16^{5-k}}{8k+m} = \sum_{k=0}^{5} \frac{16^{5-k}}{8k+m} + \sum_{k=6}^{\infty} \frac{16^{5-k}}{8k+m} =$$

$$= \underbrace{\frac{16^5}{m} + \frac{16^4}{8+m} + \frac{16^3}{16+m} + \cdots + \frac{16^0}{40+m}}_{Teil\ 1:\ Ganze\ und\ Bruchteile} + \underbrace{\frac{16^{-1}}{48+m} + \frac{16^{-2}}{56+m} + \cdots + \cdots}_{Teil\ 2:\ Bruchteile}$$

Die Reihe ist gegliedert in hexadezimale Stellenwerte.
Nur Teil 1 beinhaltet Ganze! Da die Stellen hier allerdings selber keine ganzen Zahlen sind ($\frac{1}{m}16^5$, $\frac{1}{8+m}16^4$, ...), ergibt Teil 1 eine gemischte Hexadezimalzahl. Hier ist es nötig, den ganzzahligen Teil abzutrennen.

In Teil 2 sind **keine Ganzteile möglich**, da der Nenner jeweils größer ist als der Stellenwert im Zähler.

Vom Gesamtergebnis $16^5 \cdot S_m$ muss nochmal der Ganzzahlanteil abgezogen werden.

$$\{16^5 \cdot S_m\} = \left\{\left\{\sum_{k=0}^{5} \frac{16^{5-k}}{8k+m}\right\} + \sum_{k=6}^{\infty} \frac{16^{5-k}}{8k+m}\right\}$$

Allgemein für den Stellenwert d

$$\{16^d \cdot S_m\} = \left\{\left\{\sum_{k=0}^{d} \frac{16^{d-k}}{8k+m}\right\} + \sum_{k=d+1}^{\infty} \frac{16^{d-k}}{8k+m}\right\}.$$

Die Hexadezimalstellen nach der 5. (d-ten) Stelle hinter dem Komma, ergeben sich dann aus Formel (4.1).

Inwiefern kann man sich das Berechnen der Stellenwerte bis d ersparen?

Um die Nachkommastellen von π ab der 2-millionsten Stelle zu berechnen, müssen die Summanden

$$\{16^{999999} \cdot S_m\} = \left\{\left\{\sum_{k=0}^{999999} \frac{16^{999999-k}}{8k+m}\right\} + \sum_{k=1000000}^{\infty} \frac{16^{999999-k}}{8k+m}\right\}$$

berechnet werden. Für die uns interessierenden Nachkommastellen hauptsächlich relevant sind die Teile 2 $\left(\sum_{k=1000000}^{\infty} \frac{16^{999999-k}}{8k+m}\right)$, welche rasch konvergieren und die Rechenschritte somit nur bis zur gewünschten Genauigkeit getrieben werden müssen. Dazu kommen allerdings noch die übrigbleibenden Nachkommastellen der Teile 1 $\left(\left\{\sum_{k=0}^{999999} \frac{16^{999999-k}}{8k+m}\right\}\right)$.

Berechnungen in $\left\{\sum_{k=0}^{999999} \frac{16^{999999-k}}{8k+m}\right\}$ lassen sich glücklicherweise abkürzen.

Um es wieder ein bisschen übersichtlicher zu gestalten, kehren wir wieder zu $d = 5$ zurück.

$$\left\{\sum_{k=0}^{5} \frac{16^{5-k}}{8k+4}\right\} = \left\{\frac{16^5}{8\cdot 0+4} + \frac{16^4}{8\cdot 1+4} + \frac{16^3}{8\cdot 2+4} + \cdots + \frac{16^0}{8\cdot 5+4}\right\} =$$

$$= \left\{\underbrace{\frac{16^5(=1048576)}{4}}_{>1} + \underbrace{\frac{16^4(=65536)}{12}}_{>1} + \cdots + \frac{16^0(=1)}{44}\right\}$$

Fast alle Summanden haben Ganzzahlanteile, die man ohnehin weglassen kann. **Dazu eignet sich das Rechnen in Restklassen!**

Satz

Sei $a \in \mathbb{Q}^+$ und $a = \frac{p}{q}$ die Bruchdarstellung von a, so gilt

$$\left\{\frac{p}{q}\right\} = \frac{p \bmod q}{q}$$

4.2

Ein Beispiel: $\left\{\frac{26}{7}\right\} = \frac{26 \bmod 7}{7} = \frac{5}{7}$

$$\left\{\sum_{k=0}^{5} \frac{16^{5-k}}{8k+4}\right\} = \left\{\frac{\overbrace{16^5 \bmod 4}^{0}}{4} + \frac{\overbrace{16^4 \bmod 12}^{4}}{12} + \frac{\overbrace{16^3 \bmod 20}^{16}}{20} + \cdots \frac{\overbrace{16^1 \bmod 36}^{16}}{36} + \frac{\overbrace{16^0 \bmod 4}^{1}}{44}\right\}$$

$$= \left\{\frac{0}{4} + \frac{4}{12} + \frac{16}{20} + \frac{4}{28} + \frac{16}{36} + \frac{1}{44}\right\} = \{1{,}743362193..\} = 0{,}743362193..$$

Bei den Berechnungen der Potenzen $16^n \bmod q$ bleibt man stehts bei niedrigen Zahlen, da nach jeder Multiplikation wieder $\bmod q$ gerechnet werden kann.

Z.B.: $16^{11} \bmod 13 = (16 \bmod 13)^{11} \bmod 13 \Leftrightarrow 16^{11} \equiv 3^{11}$

$$3^{11} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{3 \cdot 3}_{=9} \cdot 3}_{\equiv 1} \cdot 3}_{=3} \cdot 3}_{=9} \cdot 3}_{\equiv 1} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\equiv 9} \equiv_{(13)}$$

Außerdem gibt es dafür noch viel schnellere Algorithmen (Fast Modular Exponentiation).

> *Run times for the BBP algorithm depend on the system and the arithmetic being used, and increase roughly linearly with the position d. However, even rather large values of d can be handled in modest run times - the case $d = 10\,000\,000$ requires only 51 seconds on the author's Apple G5 workstation. A value of 10^{15} is roughly the present-day limit of computational feasibility on large parallel systems. (David H. Bailey; The BBP Algorithm for Pi; September 17, 2006)*

Übrigens, die 1-millionste Stelle von π ist 1.