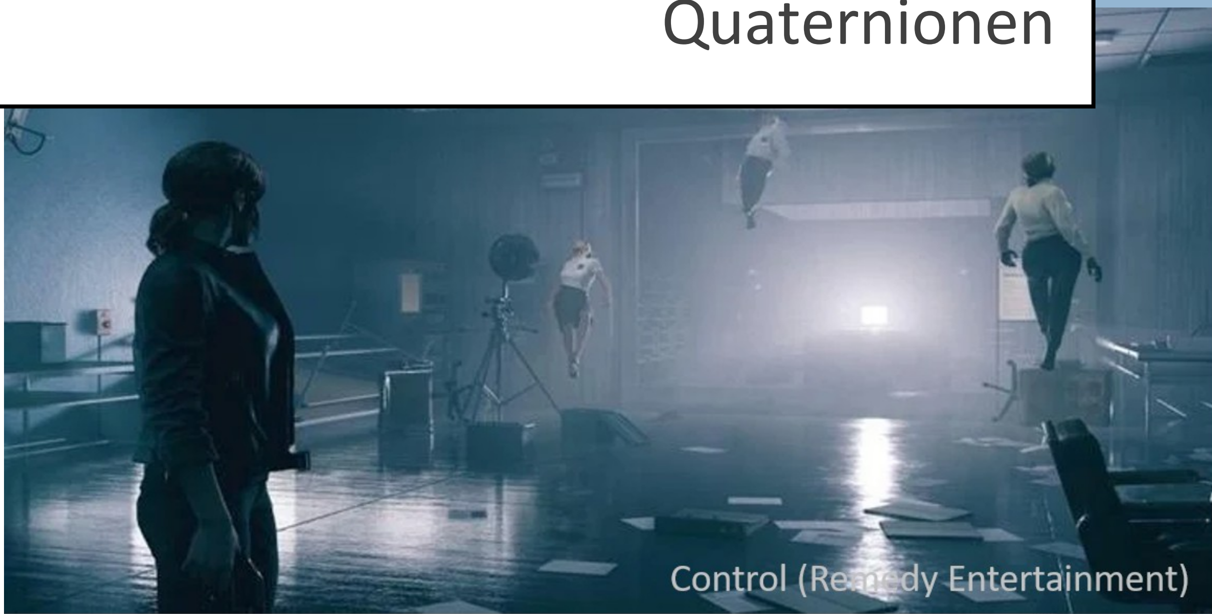
Computergrafik

Die Mathematik hinter OpenGL, DirectX, etc.

Quaternionen



UHLMAN

Inhalt

1 Einleitung

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen beinhaltet eine Drehung in der Gauß'schen Zahlenebene. Um Drehungen im 3-dimensionalen Raum mathematisch darzustellen, sind hyperkomplexe Zahlen nötig. Diese Zahlen haben einen erweiterten Imaginärteil.

$$z = a + ib + jc + \ldots$$

Insbesondere normierte Quaternionen $z = a + ib + jc + kd, |z| = 1$ können Rotationen in 3D simulieren.

Üblicherweise werden für Rotationen orthogonale Drehmatrizen verwendet. Sie haben aber einen Nachteil. Wegen der beschränkten Anzahl der verwendeten Dezimalstellen müssen Werte gerundet werden. Diese Rundungsfehler pflanzen sich bei wiederholten Matrix-Matrix-Multiplikationen fort. Die Folge ist eine irgendwie gestauchte oder verzerrte Darstellung, da die Matrix mit der Zeit nicht mehr orthonormal ist. Eine nachträgliche Orthonormalisierung ist zwar möglich, aber aufwändig. Quaternionen umgehen das Problem.

Außerdem ist eine Rotation um eine beliebige Achse mit Drehmatrizen wesentlich aufwändiger als mit Quaternionen.

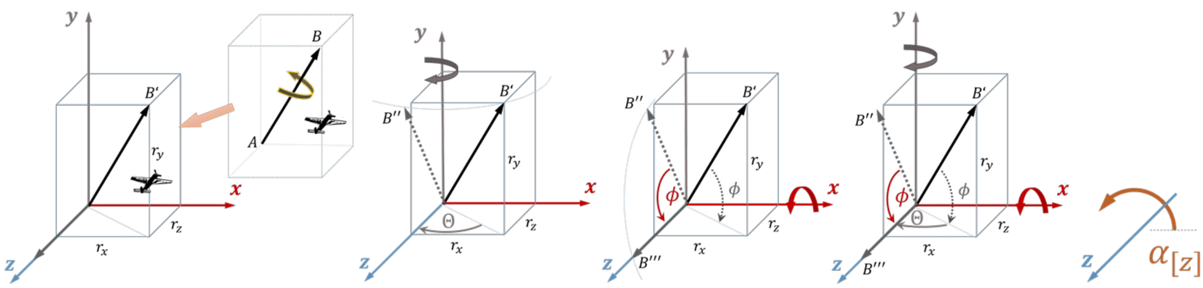


Abb. 1: Teile der Schritte bei Verwendung von Matrizen

Nachteilig ist der Umstand, dass Quaternionen bei geometrischen Abbildungen nur für Drehungen anwendbar sind.

2 Rotation über komplexe Zahlen

1.1 Rotation in 2D

Bekanntlich ergibt die Multiplikation zweier komplexer Zahlen eine „Drehskalierung“ in der komplexen Zahlenebene. So ergibt

$z_1 \cdot z_2 = (a+ib) \cdot (c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$,

in Polarkoordinaten

$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot [\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)] \cdot |z_2| \cdot [\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)] = \text{¿¿} |z_1||z_2| \cdot \text{¿}$

Soll ein Punkt $P = (x_P\, y_P)$ mit dem Ursprung als Rotationszentrum um den Winkel φ gedreht werden, so kann der Punkt P als komplexe Zahl $P_C = x_P + i\, y_P$ interpretiert werden.

Die Multiplikation mit einer normierten komplexen Zahl ($|z_{R(\varphi)}| = 1$)

$z = a + ib = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

bewirkt die angestrebte Drehung. (Abb. 2)

$z_{R(\varphi)} \cdot P_C = (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \cdot P_C = P_C^{'}$

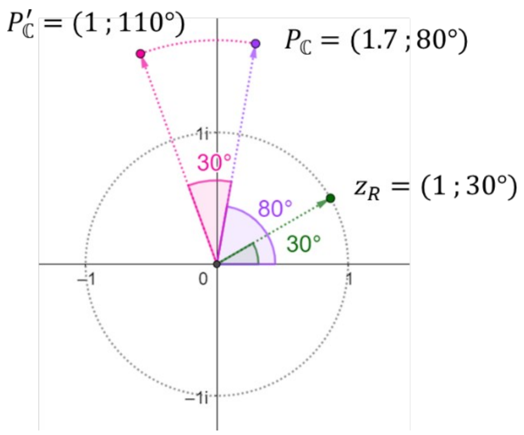


Abb. 2

1.2 Rotation in 3D – Hyperkomplexe Zahlen

Um 3-dimensionale Transformationen auch mit komplexen Zahlen zu simulieren, müssen auch diese um zumindest eine Dimension erweitert werden.

$z=a\cdot 1+b\cdot i+c\cdot j,(a,b,c\in R)$

Komplexe Zahlen mit mehr als einer imaginären Einheit nennt man **HYPERKOMPLEXE ZAHLEN**.

Die vorgeschlagenen 3-dimensionalen hyperkomplexen Zahlen erweisen sich allerdings nicht für Rotationen geeignet. Es lässt sich insbesondere keine vernünftige Multiplikation definieren. Unter „vernünftig“ verstehen wir Abgeschlossenheit sowie Distributiv-, Assoziativ- und Kommutativgesetz. Beispielsweise lässt sich $z=i\cdot j$ nicht wieder als Element dieses Zahlenraums darstellen. (Siehe Anhang)

1.3 Quaternionen

William R. Hamilton entdeckte 1843, dass eine vierdimensionale Erweiterung der komplexen Zahlen existiert, die zwar nicht kommutativ, aber ansonsten allen Anforderungen der Multiplikation genügt. Das Fehlen der Kommutativität ist ein Mangel, der aber auch bei den Drehmatrizen auftritt, die wir ja durch solche „hyperkomplexen“ Zahlen simulieren wollen.

Hyperkomplexe Zahlen in 4 Dimensionen werden als **Quaternionen**[1] bezeichnet.

QUATERNIONEN sind folgendermaßen definiert:

$$q=a\cdot 1+b\cdot i+c\cdot j+d\cdot k \text{ mit } a,b,c,d\in R$$

Betrag: $|q|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$

Konjugation $q^{¿}=a\cdot 1-b\cdot i-c\cdot j-d\cdot k$

Für die imaginären Einheiten i,j,k gilt:

$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$

Insbesondere ist dann

$ij=+k, jk=+i, ki=+j$

$ji=-k, kj=-i, ik=-j$

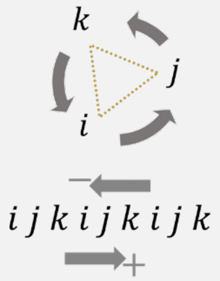
1 Duden: Quaternion, die (feminin, Betonung: Quaternion),(Vergleiche: Diskussion, Kommunion, …)

Die Menge der Quaternionen wird nach Hamilton mit H bezeichnet!

Merkregel: Die Abfolge der imaginären Einheiten ist zyklisch,

- im mathematisch positiven Sinn mit positivem Vorzeichen (+¿), andernfalls mit negativem (−¿).
- alphabetische Richtung ¿, Gegenrichtung ¿.

BEISPIELE



$iki=(ik)i=-jk=-i$

$ikj=-ji=k$

$ijk=(ij)k=k\cdot k=-1$

$kki=-i$

Ich verwende hier für Quaternionen die Schriftart „**bold**“.

1.4 Rechnen in H

Quaternionen können addiert, subtrahiert, multipliziert und auch dividiert werden.

ADDITION

$$q_1+q_2=(a_1+i\,b_1+j\,c_1+k\,d_1)\cdot(a_2+i\,b_2+j\,c_2+k\,d_2)=¿¿(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)+j(c_1+c_2)+k(d_1+d_2)$$

SUBTRAKTION (Die additiv Inverse)

$$q_1-q_2=(a_1+i\,b_1+j\,c_1+k\,d_1)-(a_2+i\,b_2+j\,c_2+k\,d_2)=\ldots$$

MULTIPLIKATION

Die Multiplikation gestaltet sich um einiges komplizierter.

$$q_1\cdot q_2=(a_1+i\,b_1+j\,c_1+k\,d_1)\cdot(a_2+i\,b_2+j\,c_2+k\,d_2)=\ldots=¿$$

$$¿(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)+i(a_1b_2+b_1a_2+c_1d_2-d_1c_2)+¿$$

$$+j(a_1c_2-b_1d_2+c_1a_2+d_1b_2)+k(a_1d_2+b_1c_2-c_1b_2+d_1a_2)$$

BEISPIELE

$$q\cdot q^{¿}=(a+i\,b+j\,c+k\,d)\cdot(a-i\,b-j\,c-k\,d)=\ldots=a^2+b^2+c^2+d^2=|q|^2$$

$$\lambda\in R,\ \lambda\cdot q:=\lambda\cdot q=(\lambda+i\,0+j\,0+k\,0)\cdot(a+i\,b+j\,c+k\,d)=(\lambda a+i\,\lambda b+j\,\lambda c+k\,\lambda d)$$

DIVISION (Die multiplikativ Inverse)

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation. Sie entspricht der Multiplikation mit der multiplikativ Inversen: $q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q = 1$

Dabei spielt die Konjugation eine bedeutende Rolle. Da

$$q \cdot q^{¿} = |q|^2 \quad q \cdot \frac{q^{¿}}{|q|^2} = \frac{|q|^2}{|q|^2} = 1 \quad q^{-1} = \frac{q^{¿}}{|q|^2}.$$

Außerdem gelten beide **Assoziativ- und Distributivgesetze**!

Somit ist $(H, +, \cdot)$ mit oben definierter Addition und Multiplikation ein **Körper ohne Kommutativität der Multiplikation**.

2.1.1 Die Skalar-Vektor-Darstellung

Eine Quaternion

$$q = a + i\,b + j\,c + k\,d$$

besteht aus einem Realteil bzw. Skalarteil a und einem Imaginärteil bzw. Vektorteil $(b\,c\,d)$. Daraus ergibt sich folgende Schreibweise:

$$q := (r, \acute{v})\, ¿^{zB} \left(a, \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix} \right)$$

Die Ergebnisse der Quaternion-Grundrechnungsarten in Skalar-Vektor-Form dargestellt ergibt folgendes Bild.

ADDITION, SUBTRAKTION

$$q_1 \pm q_2 = (r_1 \pm r_2, \acute{v}_1 \pm \acute{v}_2)$$

MULTIPLIKATION (Vergleich mit oben)

$$q_1 \cdot q_2 = \left(\underbrace{a_1 a_2 - \left(b_1 b\square_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 \right)}_{Skalarteil}, \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 a_2 + a_1 b_2 + \left(c_1 d_2 - d_1 c_2 \right) \\ c_1 a_2 + a_1 c_2 + \left(d_1 b_2 - b_1 d_2 \right) \\ d_1 a_2 + a_1 d_2 + \left(b_1 c_2 - c_1 b_2 \right) \end{bmatrix}}_{Vektorteil} \right) = ¿$$

2

$$¿ \left(\underbrace{a_1 \cdot a_2}_{r_1 \cdot r_2} - \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix}}_{\acute{v}_1 \cdot \acute{v}_2}, \underbrace{a_2 \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix}}_{r_2 \cdot \acute{v}_1} + \underbrace{a_1 \cdot \begin{bmatrix} b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix}}_{r_1 \cdot \acute{v}_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix}}_{\acute{v}_1 \times \acute{v}_2} \right) = ¿$$

$$q_1 \cdot q_2 = \left(r_1, \acute{v}_1 \right) \cdot \left(r_2, \acute{v}_2 \right) = \left(\underbrace{r_1 r_2 - \hat{v}_1 \cdot \acute{v}_2}_{\text{Skalar}}, \underbrace{r_2 \acute{v}_1 + r_1 \acute{v}_2 + \acute{v}_1 \times \acute{v}_2}_{\text{Vektor}} \right)$$

Dass die Multiplikation **nicht kommutativ** ist, liegt am Vektorprodukt $\acute{v}_1 \times \acute{v}_2$.

Division

$$\frac{q_1}{q_2} = q_1 \cdot q_2^{-1} = \frac{q_1 \cdot q_2^{¿}}{|q_2|^2}$$

In diesen Formeln sind die imaginären Einheiten i, j, k schon eingearbeitet, sie kommen explizit nicht mehr vor.

2.1.2 Polardarstellung

Die Polardarstellung von Quaternionen $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$ ist derjenigen der komplexen Zahlen sehr ähnlich. Bezüglich des Realteils ergibt sich in H wie in C $\left(q \neq (0, \acute{0})\right)$

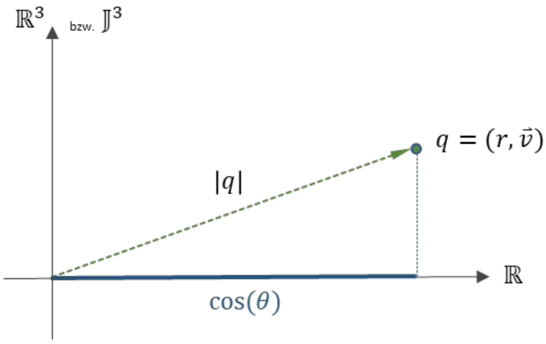


Abb. 3

$$\cos(\theta) := \frac{\overbrace{r(q)}^{Realteil}}{|q|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}$$

Dementsprechend definiert sich $\sin(\theta)$ über

$$\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) = 1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \frac{b^2 + c^2 + d^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \frac{\left|\overbrace{\acute{v}(q)}^{Vektorteil}\right|^2}{|q|^2}$$

$$\sin(\theta) := \frac{|\acute{v}|}{|q|}$$

Zusammenfassung:

$$\cos(\theta) := \frac{r}{|q|}, \sin(\theta) := \frac{|\acute{v}|}{|q|} \Leftrightarrow r = |q| \cos(\theta), |\acute{v}| = |q| \sin(\theta)$$

Mit dem **Einheitsvektor** $\hat{v} = \dfrac{\acute{v}}{|\acute{v}|}$ ergibt das $\acute{v} = |\acute{v}| \cdot \hat{v} = |q| \sin(\theta) \cdot \hat{v}$

$$q = (r, \acute{v}) = |q| \left(\cos(\theta), \sin(\theta) \cdot \hat{v}\right)$$

2.1.3 Einheitsquaternion

Eine Quaternion q mit Betrag $|q|=1$ heißt normiert bzw. Einheitsquaternion ($\hat{q}$¿. Das Produkt zweier Einheitsquaternionen und die Inverse einer Einheitsquaternion sind wieder Einheitsquaternionen. Die Einheitsquaternionen bilden also eine multiplikative Gruppe.

2 In Polarform:
$\hat{q}=(\cos(\theta), \hat{v}\cdot\sin(\theta))$

1.5 Rotation über Quaternionen

Zur verwendeten Notation, um Verwechslungen zu vermeiden:
$\hat{q}$ (fett geschrieben) ist eine Einheitsquaternion, $\hat{q}$ ein Einheitsvektor

Die 错误：引用源未找到 zeigt links die Drehung um eine Rotationsachse im 3dim Raum, rechts eine Draufsicht. Die Rotationsachse sei repräsentiert durch den Einheitsvektor$\hat{u}$ und die Rotationsebene ε durch die Einheitsvektoren $\hat{v}$ und $\hat{w}$, wobei $\hat{v}\perp\ \hat{w}=\hat{u}\times\hat{v}$. Die drei Einheitsvektoren $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ bilden somit die Basis eines eigenen Koordinatensystems. Der positive Drehsinn richtet sich nach der „Rechte-Hand-Regel“ (错误：引用源未找到).

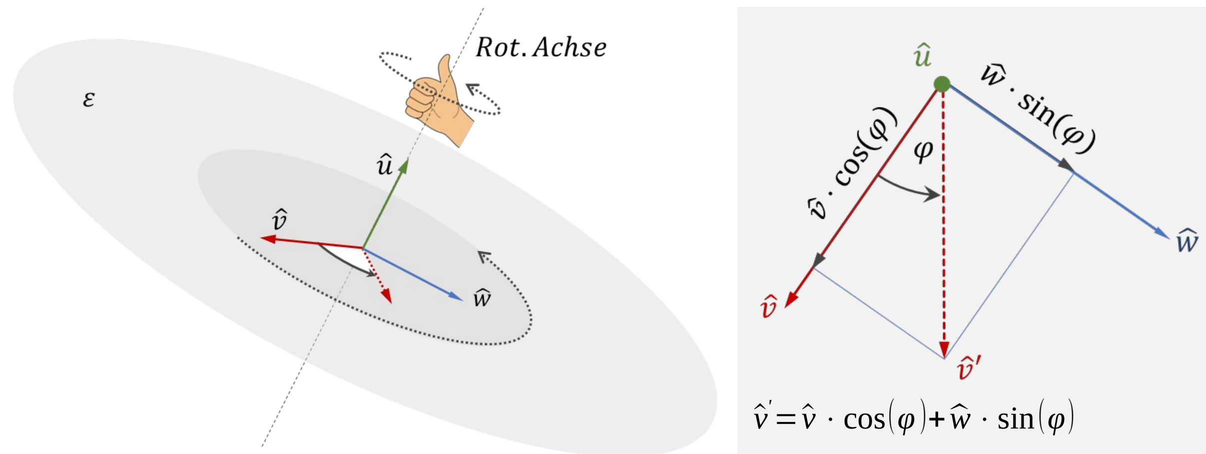


Abb. 4

Die entsprechenden Darstellungen in H seien durch die rein imaginären Einheitsquaterionen
$\hat{u}=(0,\hat{u}), \hat{v}=(0,\hat{v}), \hat{w}=(0,\hat{w})$
repräsentiert. Die **Rotationsquaternionen** sind
$\hat{q}=(\cos(\theta), \hat{u}\sin(\theta))$ und $\quad \hat{q}^{¿}=(\cos(\theta), -\hat{u}\sin(\theta))$

SATZ
Seien $\hat{q}=(\cos(\theta), \hat{u}\sin(\theta))$ und $\hat{q}^{¿}=(\cos(\theta), -\hat{u}\sin(\theta))$

a) $\hat{q}\cdot\hat{v}\cdot\hat{q}^{¿}=\hat{v}'$
bewirkt eine Drehung des Vektors $\hat{v}$ um den Winkel 2θ um den Achsenvektor $\hat{u}$!

b) $\hat{q}\cdot\hat{u}\cdot\hat{q}^{¿}=\hat{u}$ wird auf sich selbst abgebildet!

Beweis

ad a) $\hat{v}' = \hat{q} \cdot \hat{v} \cdot \hat{q}^{¿} = (\hat{q} \cdot \hat{v}) \cdot \hat{q}^{¿} = ¿$

$$¿\left(\left(\cos(\theta), \hat{u}\sin(\theta)\right) \cdot (0, \hat{v})\right) \cdot \left(\cos(\theta), -\hat{u}\sin(\theta)\right) = ¿$$

2

$$¿\underbrace{\left(\overbrace{0\cos(\theta)}^{r_1 \cdot r_2} - \overbrace{\underbrace{\hat{u}\,\hat{v}}_{\perp \Leftrightarrow 0}\sin(\theta)}^{\acute{v}_1 \cdot \acute{v}_2}, \overbrace{\hat{v}\cos(\theta)}^{r_1 \cdot \acute{v}_2} + \overbrace{0\,\hat{u}\sin(\theta)}^{r_2 \cdot \acute{v}_1} + \overbrace{\left(\underbrace{\hat{u} \times \hat{v}}_{\widehat{w}}\right)\sin(\theta)}^{\acute{v}_1 \times \acute{v}_2}\right)}_{\left(0, \hat{v}\cos(\theta) + \widehat{w}\sin(\theta)\right)} \cdot \left(\cos(\theta), -\hat{u}\sin(\theta)\right)$$

$$¿\left(0, \hat{v}\cos(\theta) + \widehat{w}\sin(\theta)\right) \cdot \left(\cos(\theta), -\hat{u}\sin(\theta)\right) = \ldots$$

und aufgrund der Länge schreiben wir jetzt 2-zeilig …

$$\dots = \begin{pmatrix} \overbrace{0\cos(\theta) - \left(\hat{v}\cos(\theta)+\hat{w}\sin(\theta)\right)\cdot\left(-\hat{u}\sin(\theta)\right)}^{Skalarteil} \quad , \\ \underbrace{-0\,\hat{u}\sin(\theta)+\cos(\theta)\left(\hat{v}\cos(\theta)+\hat{w}\sin(\theta)\right)+\left(\hat{v}\cos(\theta)+\hat{w}\sin(\theta)\right)\times\left(-\hat{u}\sin(\theta)\right)}_{Vektorteil} \end{pmatrix} = \text{¿}$$

2

$$\text{¿}\begin{pmatrix} \overbrace{\underbrace{\hat{u}\,\hat{v}}_{\perp\,\Leftrightarrow\,0}\sin(\theta)\cos(\theta) - \underbrace{\hat{u}\,\hat{w}}_{\perp\,\Leftrightarrow\,0}\sin^2(\theta)}^{Skalarteil}, \\ \underbrace{\hat{v}\cos^2(\theta)+\hat{w}\sin(\theta)\cos(\theta)+(\underbrace{\hat{v}\times-\hat{u}}_{\hat{w}})\sin(\theta)\cos(\theta)+\left(\underbrace{\hat{w}\times-\hat{u}}_{-\hat{v}}\right)\sin^2(\theta)}_{Vektorteil} \end{pmatrix} = \text{¿}$$

$$\text{¿}\left(0,\hat{v}\cdot\left(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)\right)+\hat{w}\cdot 2\sin(\theta)\cos(\theta)\right)=\dots$$

Mit Hilfe trigonometrischer Identitäten ergibt sich daraus

$$\hat{v}' = \hat{q}\cdot\hat{v}\cdot\hat{q}^{\text{¿}} = \left(0,\hat{v}\cdot\cos(2\theta)+\hat{w}\cdot\sin(2\theta)\right) = \hat{v}\cdot\cos(2\theta)+\hat{w}\cdot\sin(2\theta)$$

Zurückübersetzt nach R^3 bedeutet das $\hat{v}' = \hat{v}\cdot\cos(2\theta)+\hat{w}\cdot\sin(2\theta)$. Das ist genau das, was gemäß Abb. 4 rechts zu erwarten war. Allerdings mit dem Unterschied, dass die Quaternionen-Rotation eine Drehung mit dem doppelten Winkel erzeugt. Das wird letztendlich zu berücksichtigen sein!

ad b) $\hat{u}' = \hat{q}\cdot\hat{u}\cdot\hat{q}^{\text{¿}} = \left(\left(\cos(\theta),\hat{u}\sin(\theta)\right)\cdot(0,\hat{u})\right)\cdot\left(\cos(\theta),-\hat{u}\sin(\theta)\right) = \text{¿}$

$$\text{¿}\left(0-\hat{u}\hat{u}\sin(\theta),\hat{u}\cos(\theta)+0+\left(\underbrace{\hat{u}\times\hat{u}}_{0}\right)\sin(\theta)\right)\cdot\left(\cos(\theta),-\hat{u}\sin(\theta)\right) = \text{¿}$$

$$\text{¿}\left(-\sin(\theta),\hat{u}\cos(\theta)\right)\cdot\left(\cos(\theta),-\hat{u}\sin(\theta)\right) = \text{¿}$$

$$\text{¿}\left(-\sin(\theta)\cos(\theta)+\underbrace{\hat{u}\,\hat{u}}_{1}\sin(\theta)\cos(\theta),\underbrace{\hat{u}\sin^2(\theta)+\hat{u}\cos^2(\theta)}_{\hat{u}\cdot 1}-\left(\underbrace{\hat{u}\times\hat{u}}_{0}\right)\sin(\theta)\cos(\theta)\right) = \text{¿}\,\text{¿}(0,\hat{u}) = \hat{u}$$

ROTATIONSQUATERNION $\hat{q}_R$ FÜR EINE DREHUNG UM DEN WINKEL θ

$$\hat{q}_R = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \hat{u} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

2

1.6 Achsendrehung eines Punktes $P = (x_P \, y_P \, z_P)$

Voraussetzung: Die Rotationsachse mit dem Einheitsvektor $\hat{u}$ verläuft durch den Koordinatenursprung $(0\,0\,0)$. Die Rotationsebene ε ist gegeben durch P und den Basisvektoren $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$, wie im vorigen Kapitel behandelt.

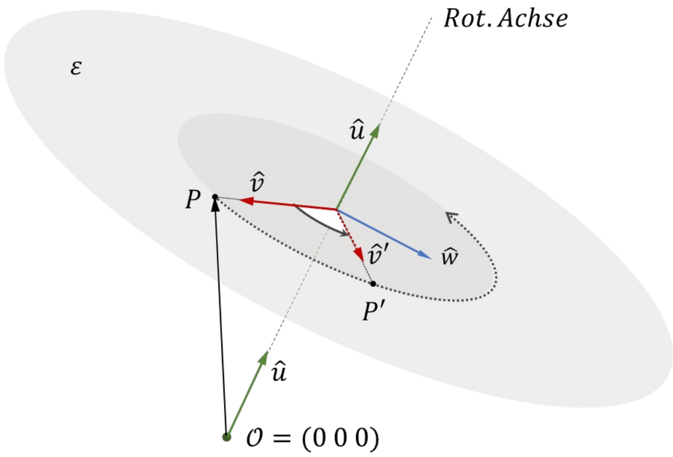


Abb. 5

Der Einheitsvektor $\hat{v}$ zeige Richtung P, wie dies in Abb. 5 dargestellt. Dann gilt

$P = \acute{P} = \mu \hat{u} + v \hat{v}$ mit $\mu, v \in R$.

$P_H = (0, \acute{P}) = \mu \hat{u} + v \hat{v}$ sei die Entsprechung in H.

DIE QUATERNIONEN-ROTATION: $\hat{q}_R = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \hat{u} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$ und $P_H = (0, \acute{P}) = \mu \hat{u} + v \hat{v}$

$\hat{q}_R \cdot P_H \cdot \hat{q}_R^{¿} = \mu \cdot \hat{u} + v \cdot (\hat{v} \cdot \cos(\theta) + \hat{w} \cdot \sin(\theta)) ¿^{REF_{Ref\,113978799} ¿¿ MERGEFORMAT\ Abb.3} \mu \cdot \hat{u} + v \cdot \hat{v}' = P_H' = (0, \acute{P}')$

Begründung:
$\hat{q}_R \cdot P_H \cdot \hat{q}_R^{¿} = \hat{q}_R \cdot (\mu \hat{u} + v \hat{v}) \cdot \hat{q}_R^{¿} = \mu \cdot \hat{q}_R \cdot \hat{u} \cdot \hat{q}_R^{¿} + v \cdot \hat{q}_R \cdot \hat{v} \cdot \hat{q}_R^{¿} = \ldots$

BEISPIEL

Der dargestellte Würfel mit Kantenlänge $s=2$ wird um die eingezeichnete Diagonalachse, wie in der Grafik angedeutet, um $\varphi=+20°$ gedreht.

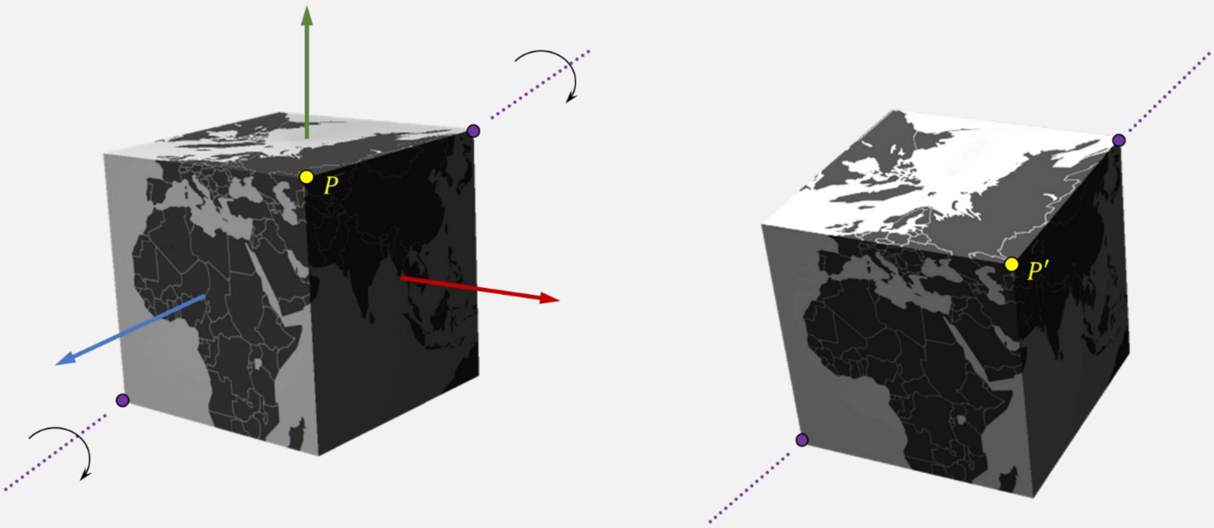


Abb. 6

Berechne die Drehquaternion $\hat{q}_R$ und berechne P'.

LÖSUNG:

Der zu drehende Punkt hat die Koordinaten $P=(1 1 1)$. Die Drehachse mit Richtungsvektor

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ wird normiert auf $\hat{u}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.57735 \\ 0.57735 \\ -0.57735 \end{bmatrix}$.

ad a) Die Rotationsquaternion berechnet sich wie folgt:

$$\hat{q}_R=\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right),\hat{u}\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=\left(\cos(10°),\hat{u}\cdot\sin(10°)\right)=\left(0.98481,\begin{bmatrix} +0.10026 \\ +0.10026 \\ -0.10026 \end{bmatrix}\right)$$

ad b) Den ersten Teil der Drehung beinhaltet den Schritt

$$\hat{q}_R \cdot P_H = \left(0.98481, \begin{bmatrix} 0.10026 \\ 0.10026 \\ -0.10026 \end{bmatrix}\right) \cdot \left(0, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = ¿$$

2

$$¿\left(0 - \begin{bmatrix} 0.10026 \\ 0.10026 \\ -0.10026 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, 0.98481 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \acute{0} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.10026 \\ 0.10026 \\ -0.10026 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 0.20052 \\ -0.20052 \\ 0 \end{bmatrix}}\right) = ¿$$

$$¿\left(-0.10026, \begin{bmatrix} 1.18533 \\ 0.78429 \\ 0.98481 \end{bmatrix}\right)$$

$$P_H^{'}=\left(\hat{q}_R \cdot P_H\right)\cdot \hat{q}_R^{\cdot}=\left(-0.10026\,,\begin{bmatrix}1.18533\\0.78429\\0.98481\end{bmatrix}\right)\cdot\left(0.98481\,,\begin{bmatrix}-0.10026\\-0.10026\\+0.10026\end{bmatrix}\right)=¿$$

$$¿\left(\begin{array}{c}-0.09874-\begin{bmatrix}1.18533\\0.78429\\0.98481\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-0.10026\\-0.10026\\+0.10026\end{bmatrix},\\ \underbrace{-0.10026\cdot\begin{bmatrix}-0.10026\\-0.10026\\+0.10026\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}0.01005\\0.01005\\-0{,}01005\end{bmatrix}}+\underbrace{0.98481\cdot\begin{bmatrix}1.18533\\0.78429\\0.98481\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}1.16732\\0.77238\\0.96985\end{bmatrix}}+\underbrace{\begin{bmatrix}1.18533\\0.78429\\0.98481\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-0.10026\\-0.10026\\+0.10026\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}0.17737\\-0.21757\\-0.04021\end{bmatrix}}\end{array}\right)=¿$$

$$¿\,P_H^{'}=\left(0.0000(3),\begin{bmatrix}1.35504\\0.56486\\0.91959\end{bmatrix}\right)\qquad P=\left(1.35504\;0.56486\;0.91959\right)$$

3 Aufgaben

1.7 $ijk=-1$

2

Für die imaginären Einheiten i, j, k gilt:

$i^2=j^2=k^2=ijk=-1$

Daraus ergeben sich die folgenden Zusammenhänge:

$ij=+k, jk=+i, ki=+j$

$ji=-k, kj=-i, ik=-j$

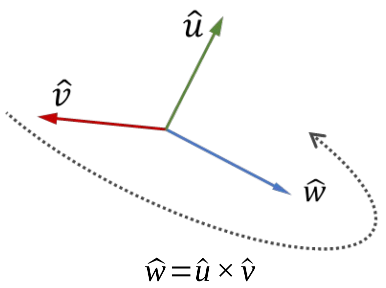
Weise sie nach!

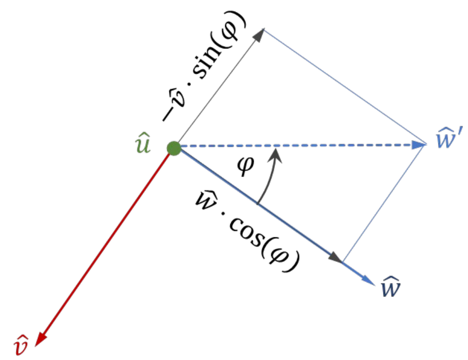
Z.B.:

$ijk=-1 \vee i\cdot$ (Mult. von links)
$iijk=i\cdot(-1)$
$-jk=-i$
$jk=+i$

$ijk=-1 \vee \cdot k$ (Mult. von rechts)
$ijkk=-k$
$-ij=-k$
$ij=k$
Oder:
$ij=k \vee \cdot k \quad ijk=kk=-1$ (q.e.d.)

1.8 Rotation von $\hat{w}=\hat{u}\times\hat{v}$





Zeige: $\hat{q}\cdot\hat{w}\cdot\hat{q}^{¿}=\hat{w}'$ mit $\hat{q}=(\cos(\theta), \hat{u}\sin(\theta))$ bewirkt eine Drehung des Vektors $\hat{w}$ um den Winkel 2θ um den Achsenvektor $\hat{u}$!

Der Beweis funktioniert analog zu $\hat{v}'=\hat{q}\cdot\hat{v}\cdot\hat{q}^{¿}$ und führt zu dem Ergebnis

$\hat{w}'=\hat{q}\cdot\hat{w}\cdot\hat{q}^{¿}=(0,-\hat{v}\cdot\sin(2\theta)+\hat{w}\cdot\cos(2\theta))=-\hat{v}\cdot\sin(2\theta)+\hat{w}\cdot\cos(2\theta)$.

LÖSUNG

$\hat{w}' = \hat{q} \cdot \hat{w} \cdot \hat{q}^{\text{¿}} = \ldots$

$\hat{q} \cdot \hat{w} = (\cos(\theta), \hat{u}\sin(\theta)) \cdot (0, \hat{w}) = (0, \hat{w}\ \ \cos(\theta) + (\hat{u} \times \hat{w})\sin(\theta)) = \text{¿¿}(0, \hat{w}\ \ \cos(\theta) - \hat{v}\ \ \sin(\theta))$

$(\hat{q} \cdot \hat{w}) \cdot \hat{q}^{\cdot} = (0, \hat{w}\ \ \cos(\theta) - \hat{v}\ \ \sin(\theta)) \cdot (\cos(\theta), -\hat{u}\sin(\theta)) = \text{¿}$
$\text{¿}(-\cos(\theta) \cdot \sin(\theta)\hat{w}\hat{v}, \cos^2(\theta)\hat{w} - \sin(\theta)\cos(\theta)\hat{v} - \sin(\theta)\cos(\theta)\hat{w} + \sin^2(\theta)(\hat{v} \times \hat{u})) = \text{¿}$
$\text{¿}\ldots = (0, -\hat{v} \cdot \sin(2\theta) + \hat{w} \cdot \cos(2\theta)) = -\hat{v} \cdot \sin(2\theta) + \hat{w} \cdot \cos(2\theta)$ ■

1.9 Rotation um die Koordinatenachsen

A) Welche Quaternion $\hat{q}$ dreht mit ihrer Konjugation $\hat{q}^{\text{¿}}$ um +240° um die z-Achse?

☐ $0{,}866 - 0{,}5\,j$ ☐ $-0{,}866 + 0{,}5\,k$ ☐ $-0{,}866 - 0{,}5\,k$ ☐ $-0{,}5 + 0{,}866\,i$ ☐ $0{,}5 + 0{,}866\,j$

LSG: ☐☒☐☐☐

B) Die Multiplikation der Punktkoordinaten $P = (x\ y\ z)$ mit der Rotationsmatrix

$R_y(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$ führt zur Drehung des Punktes um den Winkel φ um die y-Achse:

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos(\varphi) - z\sin(\varphi) \\ y \\ z\cos(\varphi) + x\sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

Zeige die Äquivalenz zur Rotation mir Quaternionen, und zwar in der Form

$q = a + i\,b + j\,c + k\,d$. Hinweis: Vereinfache durch geschickte Schreibweise: $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) := c$ und $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) := s$

1.10 Hintereinanderausführung von Drehungen

Hintereinander ausgeführte Drehungen q_1 und q_2 können als eine Drehung q zusammengefasst werden.

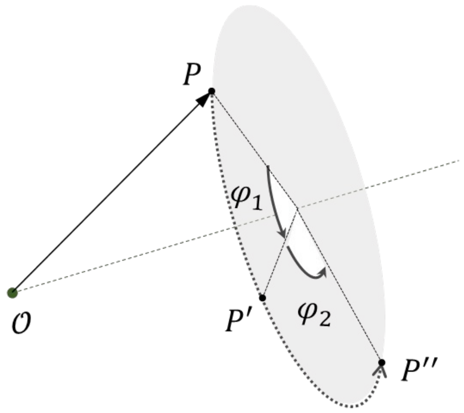


Abb. 7

$\hat{q}_2\left(\hat{q}_1 P \hat{q}_1^{¿}\right)\hat{q}_2^{¿}=\hat{q} P \hat{q}^{¿}$

Gib die Formel für $\hat{q}$ in Form von $(r, \hat{q})$ an und zeige, dass $\hat{q}$ die Summe der Drehungswinkel repräsentiert!

1.11 Kunstflug

Drehachse AB: $A=(125\,59-24)$ $B=(450\,243\,36)$ Flugzeug $X=(206\,98\,65)$

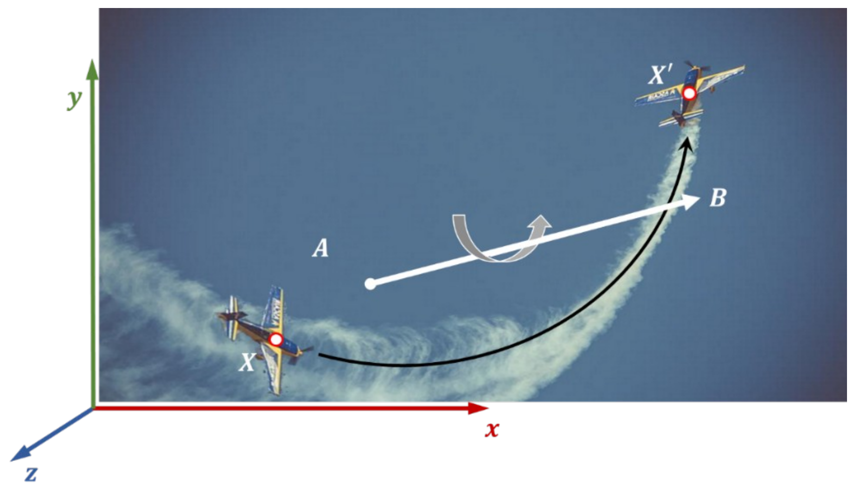


Abb. 8

Gesucht ist der Ort des Flugzeugs nach einem Kurvenflug von 120°. (Siehe Abb. 8

LÖSUNG

Rotationsachse: $\acute{A}B = \begin{bmatrix} 325 \\ 184 \\ 60 \end{bmatrix}$; Erstens: Translation in den Ursprung: $X_0 = \begin{bmatrix} 206 \\ 98 \\ 65 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 125 \\ 59 \\ -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 \\ 39 \\ 89 \end{bmatrix}$;

$$q_R = \left(\cos(120°), \acute{A}B \sin(120°) \right) = \left(-0.5, 0.866 \cdot \begin{bmatrix} 325 \\ 184 \\ 60 \end{bmatrix} \right);$$

2

$$q_R X_{0H} \dot{q_R} = \left(-0.5, 0.866 \cdot \begin{bmatrix} 325 \\ 184 \\ 60 \end{bmatrix} \right) \cdot \left(0, \begin{bmatrix} 81 \\ 39 \\ 89 \end{bmatrix} \right) \cdot \left(-0.5, 0.866 \cdot \begin{bmatrix} -325 \\ -184 \\ -60 \end{bmatrix} \right) = \ldots \begin{bmatrix} 124 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix} \quad X_0' \approx \begin{bmatrix} 124 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 125 \\ 59 \\ -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 249 \\ 59 \\ -4 \end{bmatrix}$$

4 Anhang

$$z = ij = a + bi + cj \vee (i \cdot)$$
$$iij = ia - b + cij$$
$$-j = ia - b + c\underbrace{(a + bi + cj)}_{i \cdot j}$$
$$-j = (ac - b) + (a + bc)i + c^2 j$$
$$0 + 0i - j = (ac - b) + (a + bc)i + c^2 j$$

Ein Koeffizientenvergleich führt auf $ca - b = 0, a + bc = 0, c^2 = -1$

Letzteres ($c^2 = -1$) bedeutet aber $c = i$.

Dies ist ein Widerspruch, da ja $a, b, c \in R$! ■