Matrizen

Rechnen mit Tabellen

UHLMANN

Inhalt

1 Vektoren versus Matrizen

Vektoren sind Listen, Matrizen sind Tabellen

Vektor: $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$, $v_i \in \mathbb{R}$

Matrix: $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$

- Eine $n \times m$ – Matrix besteht aus n Zeilen und m Spalten.
- Eine $n \times 1$ – Matrix ist ein Spaltenvektor.
- Eine $1 \times m$ – Matrix ist ein Zeilenvektor.
- Eine $n \times n$ – Matrix heißt quadratisch.

Spezielle Matrizen

Transponierte Matrix M^T

Vertauscht man Zeilen und Spalten einer Matrix M so erhält man die sogenannte transponierte Matrix:

z.B.: $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $M^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Quadratische $n \times n$ – Matrizen

z.B. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Nullmatrix und Einheitsmatrix

Nullmatrix: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ **Einheitsmatrix:** $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ **quadratisch!!!**

2 Rechenoperationen bei Matrizen

Addition

Es können nur Matrizen gleichen Typs addiert werden!

$$A+B=\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}}_{n\times m}+\underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots \\ b_{21} & b_{22} & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}}_{n\times m}=\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots \\ a_{12}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}}_{n\times m}$$

Beispiel: $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

Subtraktion

Die additiv inverse Matrix definiert die Subtraktion.

$$A-B=:\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}}_{n\times m}+\underbrace{\begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \cdots \\ -b_{21} & -b_{22} & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}}_{n\times m}=\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots \\ a_{12}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}}_{n\times m}$$

Beispiel: $A-B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

Skalarmultiplikation

Multiplikation mit einer Zahl.

$$r\cdot A=r\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cdot a_{11} & r\cdot a_{12} & \cdots \\ r\cdot a_{21} & r\cdot a_{22} & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}\quad,\qquad r\in\mathbb{R}$$

Beispiel: $3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$

Multiplikation

Die Matrixmultiplikation ist nicht immer möglich! Sie ist nur definiert, wenn die Spaltenanzahl der ersten und die Zeilenanzahl der zweiten Matrix übereinstimmen!

$$\underbrace{A}_{\boldsymbol{n}\times m}\cdot\underbrace{B}_{m\times\boldsymbol{k}}=\underbrace{A\cdot B}_{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{k}}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots \\ b_{21} & b_{22} & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots \\ c_{21} & c_{22} & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}\quad,c_{ij}=\sum_{s=1}^{m}a_{is}\cdot b_{sj}$$

*Das Produkt zweier Matrizen wird **Zeile mal Spalte** ähnlich dem Skalarprodukt bei Vektoren ermittelt. Das Ergebnis ist wieder eine Matrix!*

Die Matrixmultiplikationen von Zeile mit Spalte im Detail:

c_{11}: Zeile1 mal Spalte1

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ 3 & \\ 5 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 & \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

c_{21}: Zeile2 mal Spalte1

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} & & \\ 4 & 5 & 6 \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ 3 & \\ 5 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 & \\ & \end{pmatrix}$$

c_{31}: Zeile3 mal Spalte1

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \\ 3 & \\ 5 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & \\ 49 & \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 5 & \end{pmatrix}$$

c_{12}: Zeile1 mal Spalte2

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & 2 \\ & 4 \\ & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \\ 49 & \\ 76 & \end{pmatrix}$$

c_{22}: Zeile2 mal Spalte2

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} & & \\ 4 & 5 & 6 \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & 2 \\ & 4 \\ & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6 \\ 76 & \end{pmatrix}$$

c_{32}: Zeile3 mal Spalte2

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & 2 \\ & 4 \\ & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \\ 76 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 6 \end{pmatrix}$$

Ergebnis:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \\ 76 & 100 \end{pmatrix}$$

3 Rechenregeln

Für geeignet dimensionierte Matrizen gelten die üblichen Rechengesetze, allerdings ist die Matrixmultiplikation im Allgemeinen nicht kommutativ!

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Addition:

$$A + B = \mathrm{B} + \mathrm{A}$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A + O = A$$

Multiplikation:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$(r \cdot A) \cdot B = A \cdot (r \cdot B) = r \cdot (A \cdot B)\,, r \in \mathbb{R}$$

$$C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$$

$$(A + B) \cdot D = A \cdot D + B \cdot D$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Nur für quadratische Matrizen:

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n}, \qquad A^0 = I, \qquad A \cdot A^{-1} = I$$

Matrix mal Vektor = Vektor

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = w$$

Quadratische Matrizen verändern dabei nicht die Dimension des Vektors!

4 Die multiplikativ Inverse A^{-1} – Die Division

Die Division steht für die Umkehrung der Multiplikation durch die multiplikativ Inverse!

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ … führt auf ein Gleichungssystem hinaus!

Voraussetzung für die Lösbarkeit ist auf jeden Fall, dass die Matrix quadratisch ist. Aber auch dann ist eine Lösung nicht gewährleistet!

$$\begin{aligned} 2a + 5c &= 1 \\ 1a + 3c &= 0 \\ 2b + 5d &= 0 \\ 1b + 3d &= 1 \end{aligned} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die multiplikativ Inverse A^{-1} existiert nicht immer!!!

Definition: Existiert A^{-1}, so heißt A **regulär**.

5 Die Determinante einer quadratischen Matrix

Die Determinante gibt es **nur für quadratische Matrizen** und ist sozusagen ihr „**Betrag**“!

Determinanten wurden als Hilfsmittel zum Lösen von Gleichungssystemen erfunden und erst später als Eigenschaften von Matrizen definiert. Die Determinante hat auch gleichzeitig als „Betrag“ eine geometrische Bedeutung.

Schreibweise: $\det(A) = |A|$

5.1 Die Determinante einer 2×2-Matrix

$$\det(A) = |A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Merkregel: „Hauptdiagonale minus Nebendiagonale“

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Beispiel

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathrm{A}) = \det\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 14$

5.2 Die Determinante einer $n \times n$ – Matrix

Die eigentliche Definition eine Determinante definiert sie als eindeutige Abbildung mit ganz bestimmten festgelegten Eigenschaften, auf die wir hier nicht näher eingehen. Aus diesen Eigenschaften ergeben sich Möglichkeiten der Berechnung.

So lässt sich die Determinante einer $n \times n$ – Matrix ($n > 2$) rekursiv berechnen. Dabei wird der Wert der Determinante auf kleinere Unterdeterminanten zurückgeführt.

Beispiel 3×3

ENTWICKLUNG NACH DER 1. SPALTE:

Die Elemente der 1. Spalte werden der Reihe nach herausgehoben, ihre jeweilige Zeile und Spalte gelöscht und die Ergebnisse abwechselnd addiert und subtrahiert.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & a_{22} & a_{23} \\ \square & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} \square & a_{12} & a_{13} \\ \square & \square & \square \\ \square & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} \square & a_{12} & a_{13} \\ \square & a_{22} & a_{23} \\ \square & \square & \square \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Beispiel 4×4

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \left[1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \cdots \right] - 2 \cdot \left[2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \cdots \right] + 5 \cdot [\ldots] + 2 \cdot [\ldots] = \cdots = -374^{*}$$

* Matrix calculator online

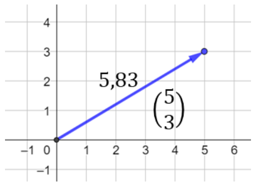
5.3 Determinante und Betrag

Vektor

Der Betrag eines Vektors entspricht der Größe der zugehörenden Distanz.

Der Vektor $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$|v|$ ergibt betragsmäßig den Inhalt der dazugehörenden Parallelogrammfläche.



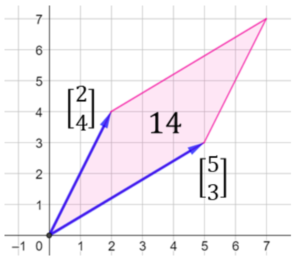
2×2-Matrix

Der Betrag der Determinante einer 2×2-Matrix entspricht der Größe einer dazugehörenden Parallelogrammfläche.

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ besteht aus zwei Spaltenvektoren:

$$A = \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$$

$|\det(A)| = 14$ ergibt betragsmäßig den Inhalt der dazugehörenden Parallelogrammfläche.

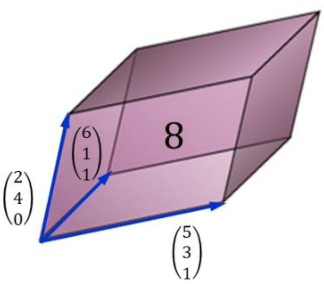


3×3-Matrix

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ besteht aus drei Spaltenvektoren:

$$A = \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$|\det(A)| = |-8| = 8$ ergibt betragsmäßig den Inhalt des dazugehörenden Parallelepipeds.



6 Übungen

1 Gegeben sind die Matrizen A, B, C, bzw. die Vektoren D und E.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Multiplikationen lassen sich berechnen?

☐ $A \cdot B$	☐ $B \cdot C$	☐ $C \cdot D$	☐ $D \cdot E$	☐ A^2
☐ $B \cdot A$	☐ C^2	☐ $D \cdot C$	☐ $C \cdot E$	☐ $C \cdot I$

2 Gegeben sind die Matrizen A, B, C.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechne $M = (A - 2B) \cdot C$

3 Gegeben sind die Matrizen A und B.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechne: a) $A \cdot B$ b) A^{-1} und B^{-1} c) $\det(A)$ d) $\det(C)$

Lsg: $\begin{pmatrix} -18 & 49 \\ -43 & 117 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -18 & -11 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, 1, -5

4 Trikotpreise in Anhängigkeit von Größe und Design:

	Herren S	Herren L	Damen S	Damen L
uni	20 €	21 €	19 €	20 €
gestreift	23 €	25 €	22 €	24 €
zweifarbig	30 €	33 €	29 €	31 €

Größenübersicht der Mannschaften A und B:

	Mannschaft A		Mannschaft B
Herren S	10		12
Herren L	5		4
Damen S	14		12
Damen L	11		8

Multipliziere die Tabellen in Form von Matrizen! Was stellt das Ergebnis dar?