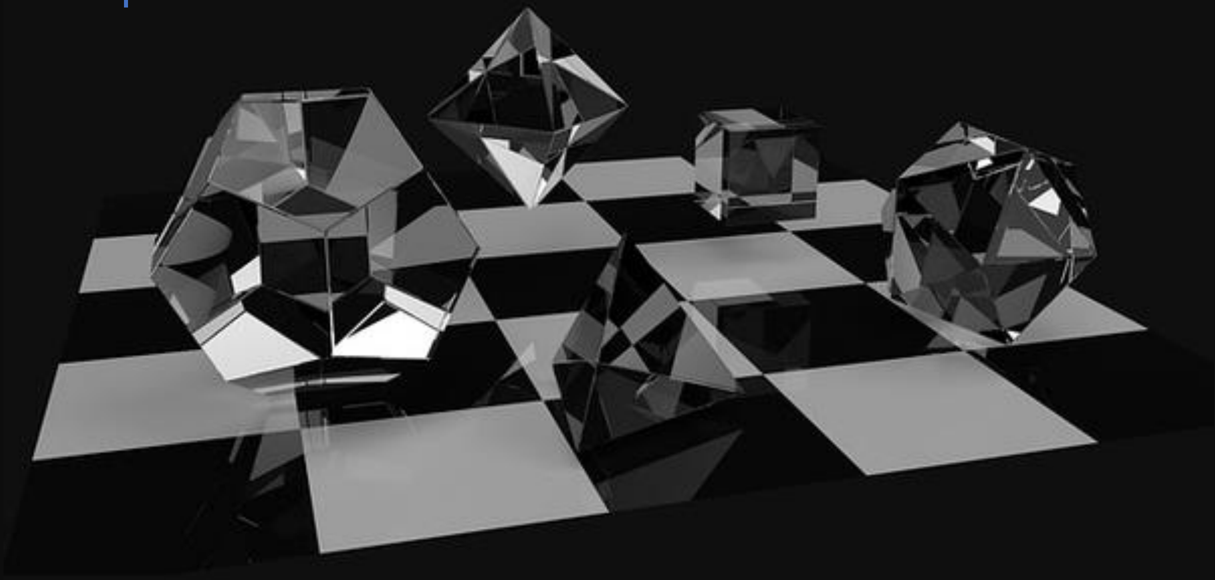
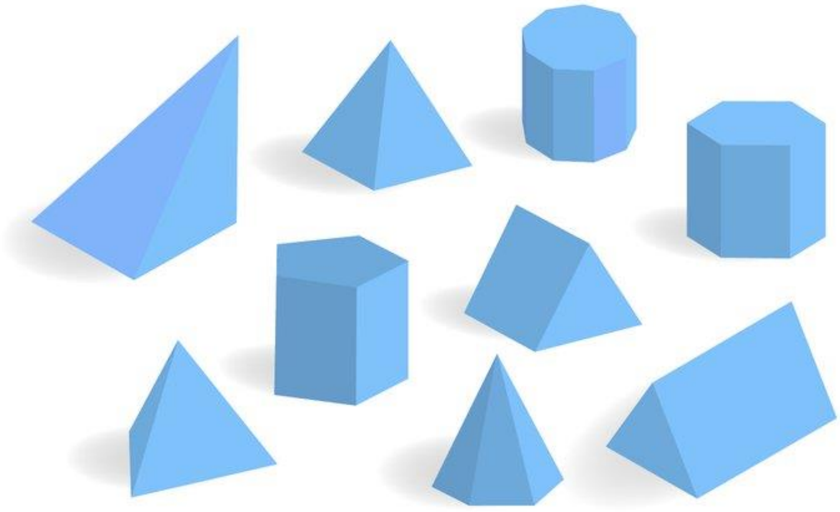
Polyeder



UHLMANN

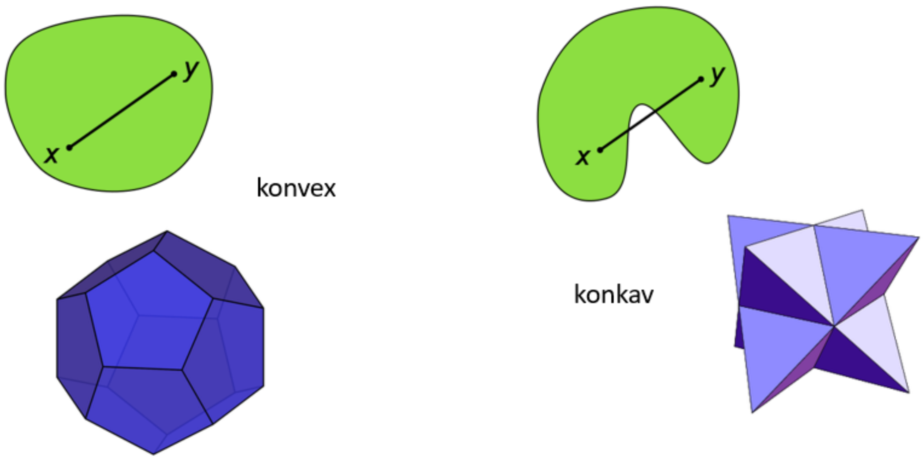
POLYEDER



Ein (dreidimensionales) Polyeder ist eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes, welche ausschließlich von ebenen Flächen begrenzt wird.

Konvexe Polyeder

Eine Punktmenge ist konvex, wenn für je zwei beliebige Punkte der Menge auch alle Punkte der Verbindungsstrecke dazu gehören.



Satz: Mit 3 Punkten eines konvexen Polyeders ist auch die zugehörige Dreiecksfläche Teil des Polyeders.

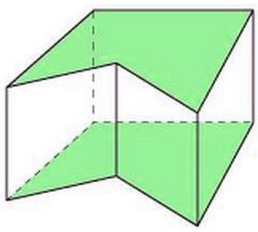
Beweis: …

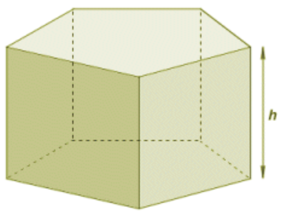
Satz: Mit 4 Punkten eines konvexen Polyeders ist auch der zugehörige Tetraeder Teil des Polyeders.

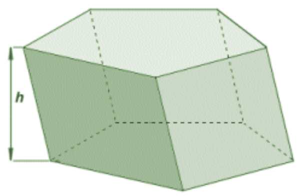
Beweis: …

Prismen

Ein **Prisma** ist ein Polyeder mit zwei parallel gegenüberliegenden kongruenten Vielecken als Grund und Deckfläche, wobei die Mantelflächen Parallelogramme sind.

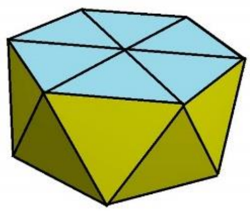






Antiprismen

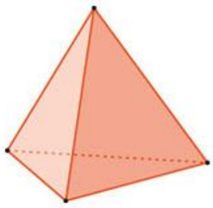
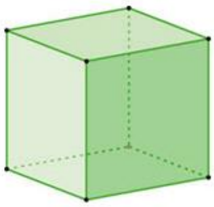
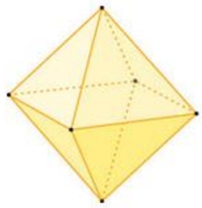
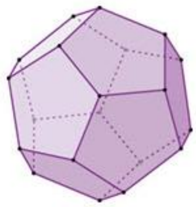
Ein **Antiprisma** ist ein Polyeder mit zwei parallel gegenüberliegenden kongruenten, aber verdrehten Vielecken als Grund und Deckfläche, wobei die Mantelflächen Dreiecke sind.



Grund- und Deckfläche können beliebige Vielecke sein!

Platonische (reguläre) Körper

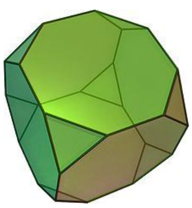
Platonischer Körper sind konvexe Polyeder, deren Seitenflächen alle zueinander kongruente regelmäßige Vielecke sind.

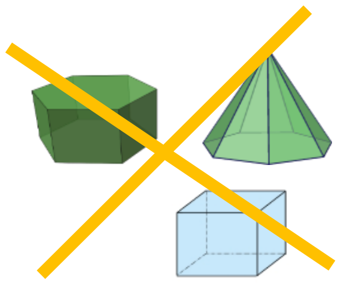





Archimedische (semireguläre) Körper

Archimedische Körper sind konvexe Polyeder mit den folgenden Eigenschaften:

- Es handelt sich weder um einen platonischen Körper noch um ein Prisma oder Antiprisma.
- Alle Seitenflächen sind regelmäßige Polygone (Vielecke).
- Von allen Ecken aus betrachtet sieht der Körper gleich aus.
  (Uniformität der Ecken: *Zu jedem Paar (P,Q) von Ecken des Polyeders ist es möglich, das Polyeder so zu drehen und zu spiegeln, dass die Ecke P dort zu liegen kommt, wo zuvor die Ecke Q war, und die beiden Positionen des Polyeders vor und nach der Drehung nicht zu unterscheiden sind. (Wikipedia)*)

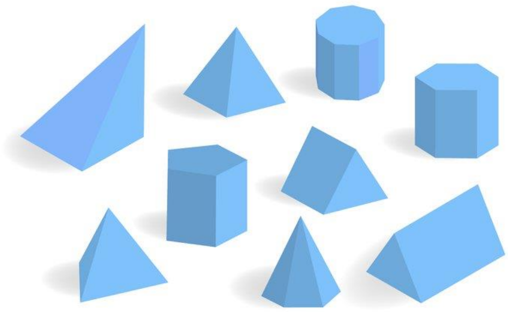




Der Eulersche Polyedersatz

Satz: Für jeden konvexen Polyeder gilt:

$$E - K + F = 2$$



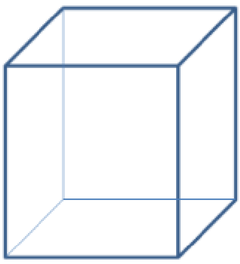
Dabei bedeutet E die Anzahl der Ecken, K die Anzahl der Kanten und F die Anzahl der Flächen des konvexen Polyeders.

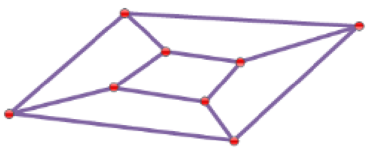
Beweis:

Teil 1: Schlegeldiagramme von Polyedern

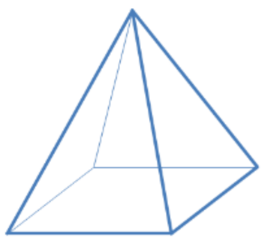
Das Polyeder wird mit einer frei gewählten Seitenfläche als Grundfläche auf eine Ebene gestellt. Die Grundfläche wird entfernt und der Rest der Polyeder-Oberfläche wird durch Verformen der Kanten so aufgeweitet und flachgedrückt, dass diese dann ein ebenes Netz in der Ebene der Grundfläche erzeugt, so dass sich keine Kanten schneiden.

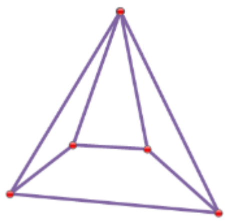
Z.B. Quader





Z.B. Quadratische Pyramide



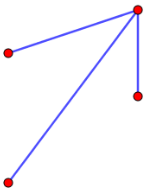


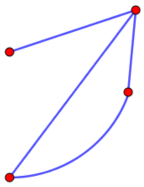
Teil 2: Ebene Netze

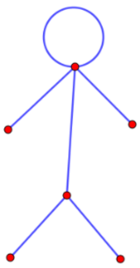
Unabhängig von Polyedern gilt für zusammenhängende ebene Netze:

$$E + F = K + 1$$

E… Knoten ; K… Kanten ; F… Flächen bzw. Gebiete







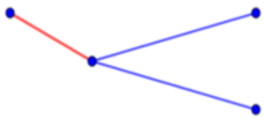
Beweis:

a) Jedes Netz beginnt mit einem Knoten (Ecke).

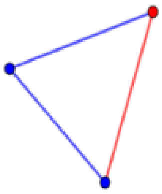
b) Für jede andere Erweiterung eines gegebenen Netzes gibt es 3 Fälle:

(1) Eine neue Kante verbindet eine bestehende Ecke mit sich selbst.
Die Netzformel verändert sich nicht!

(2) Eine neue Kante verbindet eine neue Ecke mit einer bestehenden.
Die Netzformel verändert sich nicht!



(3) Eine neue Kante verbindet bereits bestehende Ecken.
Die Netzformel verändert sich nicht!



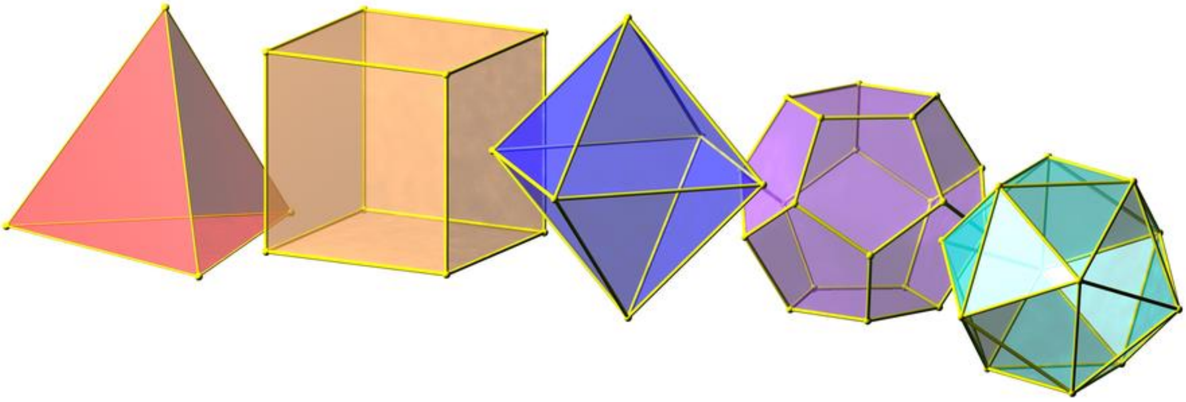
Teil 3: Übertragung auf Polyeder

In jedem Schlegel-Diagramm gilt die Netzformel $E + F = K + 1$.

Der reale konvexe Polyeder hat noch die Grundfläche dazu $\rightarrow E + F = K + 2 \rightarrow E - K + F = 1$ ■

Es gibt genau fünf platonische Körper

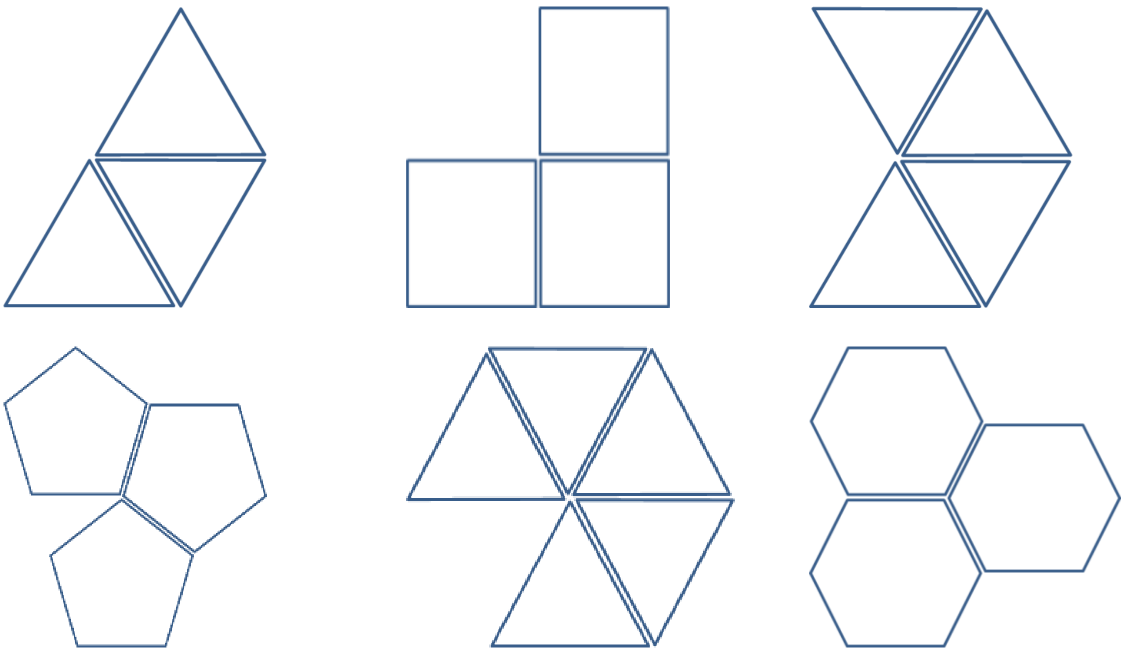
Platonischer Körper sind *konvexe Polyeder* mit allen zueinander *kongruenten regelmäßigen Vielecken*.



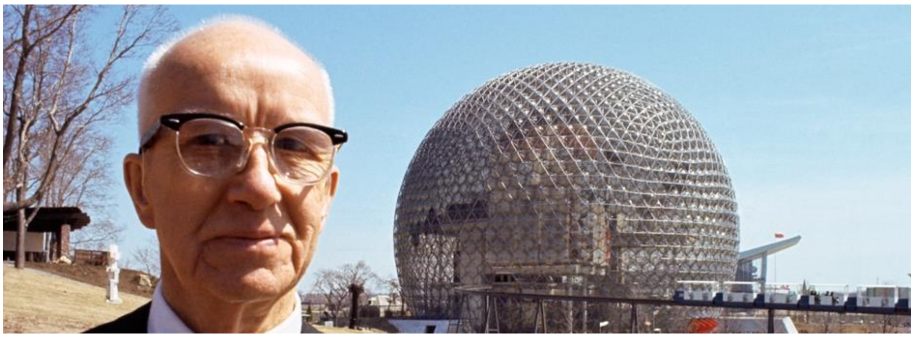
Tetraeder – Hexaeder – Oktaeder – Dodekaeder - Ikosaeder

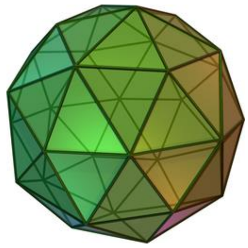
Satz: Es gibt genau 5 platonischen Körper!

Beweis: Wir betrachten eine beliebige Ecke. Hier kommen mehrere gleichseitige Polygone zusammen. Damit die Ecke konvex bleibt, muss die Summe der zusammentreffenden Winkel geringer als 360° betragen! Deshalb gibt es drei platonische Körper mit Dreiecken, einen mit Vierecken und einen mit Fünfecken. Mit Sechsecken oder mehr geht sich das nicht mehr aus.



Geodätische Kuppeln



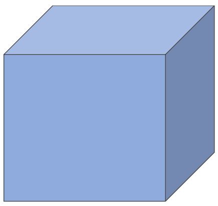


Pentakisdodekaeder

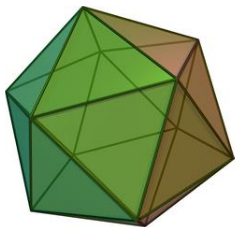
Richard Buckminster Fuller war Architekt, der sich mit „geodätischen“ Kuppeln befasste. Seine Kuppelbauten scheinen aus lauter gleichseitig-dreieckigen Gitterelementen zu bestehen. So gesehen scheinen sie in ihrer geschlossenen Form ein weiterer platonischer Körper zu sein. In Wahrheit sind die Gitterelemente allerdings keine perfekt gleichseitigen Dreiecke.

Der Klassiker: Adidas Telstar 1970

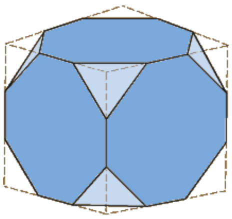
Der klassische Fußball ist ein durch Überdruck kugelförmig geformter Ikosaederstumpf. Dieser entsteht, wenn man von einem Ikosaeder die Ecken abschneidet. Dadurch entstehen Sechs- und Fünfecke. Beim Fußball sind alle Kanten gleich lang. Deshalb ist er ein Archimedischer Körper.



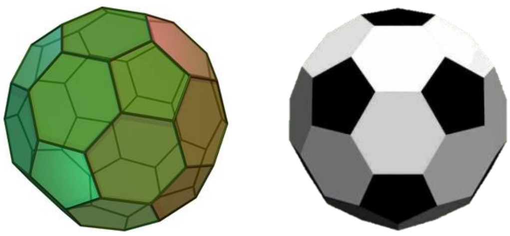
Hexaeder



Ikosaeder



Hexaederstumpf



Ikosaederstumpf