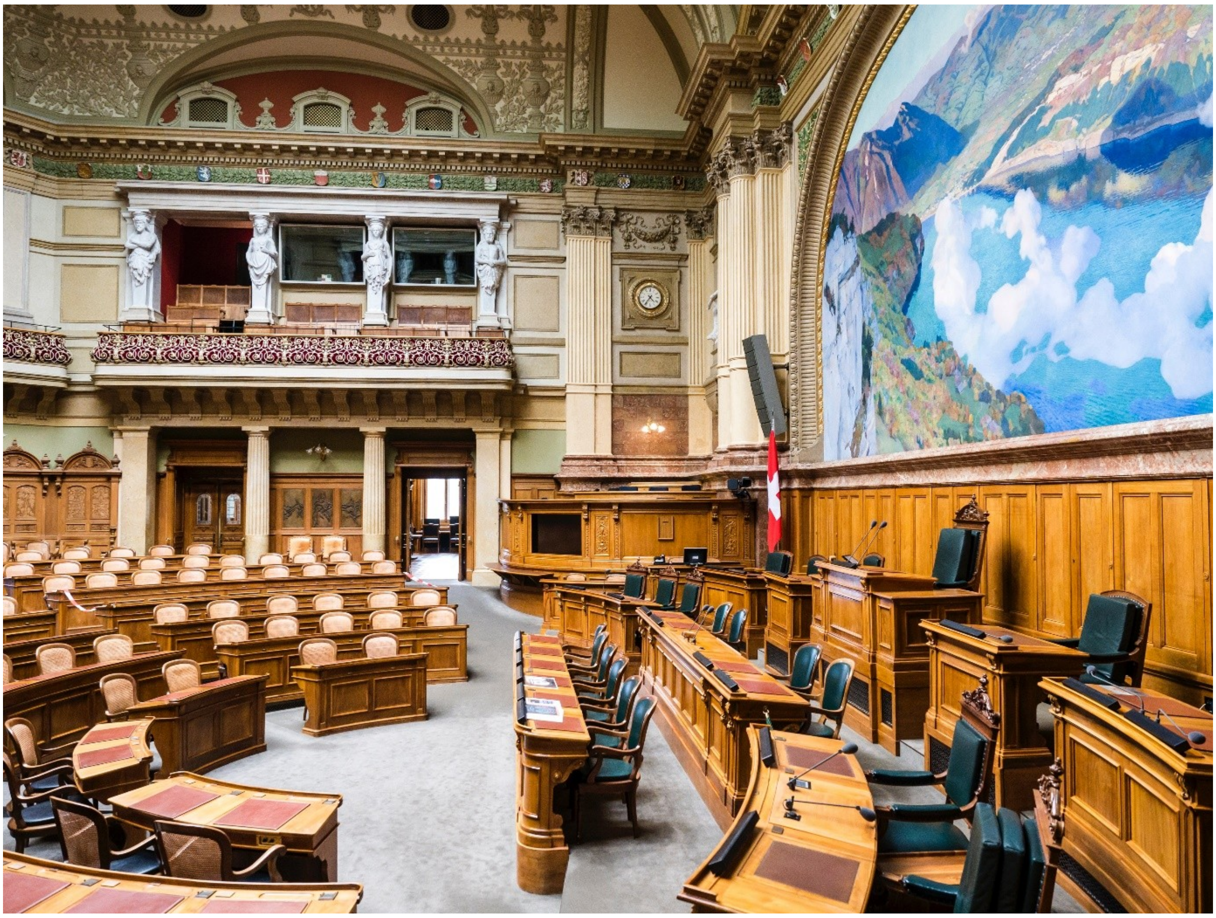


Bundeshaus, Bern, Schweiz

Wahlarithmetik

Sitzzuteilungsverfahren

MATHEMATISCHE VERFAHREN ZUR GERECHTEN ZUTEILUNG VON MANDATEN

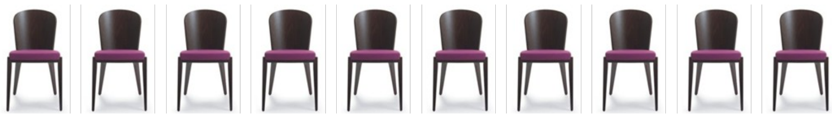
Inhalt

1 Die Problemstellung

Die Aufgabe besteht darin, ein Wahlergebnis gerecht Mandaten zuzuordnen.

Beispiel:

In einer Firma sollen 10 Personalvertreter gewählt werden.
Es treten 3 Parteien an: Partei A, B, C



Das Wahlergebnis:

	Stimmen
Partei A	208
Partei B	169
Partei C	123

Aufgabenstellung: Wie viele Mandate stehen den Parteien jeweils zu?

Zuerst werden die **Idealquoten** berechnet, also die Stimmenanteile in Prozent.

	Stimmen	Idealquote
Partei A	208	$\frac{208}{500}=0{,}416$
Partei B	169	$\frac{169}{500}=0{,}338$
Partei C	123	$\frac{123}{500}=0{,}246$

Demnach gebührt der Partei A 41,6% der Mandate, der Partei B 33,8% und C 24,6%.

Bei 10 zu vergebenden Sitzen stehen der Partei A 4,26 Sitze zu, der Partei B 3,38 und der Partei C 2,46. Nachdem die Mandatszuteilung nur ganzzahlig sein kann, bedarf es eines Sitzzuteilungsverfahrens, das aus den Idealquoten ganzzahlige Mandate generiert.

Zwei häufig angewandte Verfahren sind das **Quoten-** und **Divisorverfahren**.

2 Das Quotenverfahren

Mandatsverteilung gemäß der Stimmenquoten durch Rundung und Verteilung der Restmandate

Ein häufig verwendetes Quotenverfahren ist das nach **Hare-Niemeyer** (»*Wikipedia*). Dabei erfolgt die Mandatsverteilung durch Abrunden und Zuteilung der Restmandate nach Größe der dezimalen Reste.

Grundverteilung

Partei A: 4,16 Mandate -> 4

Partei B: 3,38 Mandate -> 3

Partei C: 2,46 Mandate -> 3

Restmandateverteilung

In diesem Fall bekommt Partei C das noch ausstehende Mandat zuerkannt, da ihre Idealquote mit .,46 den größten dezimalen Rest aufweist.

3 Das Divisorverfahren

Mandatsverteilung ohne Restmandate

Das bekannteste ist das **d'Hondt**sche Divisorverfahren.

Man dividiert die Anzahl der Stimmen jeder Partei durch 1, 2, 3 usw. Die Idee dahinter: …

Die 1. Zeile gibt an, wie viele Wähler der Mandatar bei nur einem Mandat zu vertreten hätte.

Die 2. Zeile gibt an, wie viele Wähler jeder Mandatar bei zwei Mandaten zu vertreten hätte usw.

Das 6. Mandat bekommt Partei A zugesprochen, da dann jeder Mandatar der Partei A 69,3 Stimmen vertritt. Damit vertritt er mehr Wähler als ein Mandatar der Partei C, bei dem das nur 61,5 Wähler wären.

	Partei A	Partei B	Partei C
:1	208[1.]	169[2.]	123[3.]
:2	104[4.]	84,5[5.]	61,5[7.]
:3	69,3[6.]	56,3[8.]	41
:4	52[9.]	42,3[10.]	30,8
:5	41,6	…	…

Partei A: -> 4 Mandate

Partei B: -> 4 Mandate

Partei C: -> 2 Mandate

4 Quotenverfahren mit Wahlzahl

Die Wahlzahl ist die Anzahl an Stimmen, die einem Mandat zukommt.

4.1 Mandatszahl festgelegt

Ist die **Anzahl der Mandate von vornherein festgelegt**, wie zum Beispiel bei der Wahl zum Nationalrat in Österreich mit 183 zu vergebenden Sitzen, so ergibt sich die **Wahlzahl als Division der abgegebenen Stimmen durch die vorgegebene Mandatsanzahl**.

$$WZ=\frac{S}{M}=\frac{Anzahl\,der\,Stimmen}{Anzahl\,der\,Mandate}$$

Die Anzahl der Mandate für eine bestimmte Partei P ergibt sich dann aus der Division mit Abrundung:

$$m_P=\lfloor \frac{S_P}{WZ} \rfloor$$

Bei einer **festgelegten Anzahl von Mandaten** und der sich daraus ergebenden **Wahlzahl** verbleiben allerdings meist noch **Restmandate**, die nachträglich zu vergeben sind.

Beispiel (Fortsetzung)

Mandate: 10 (nicht variabel) Stimmenanzahl: 500 $\rightarrow$ Wahlzahl $WZ=\frac{500}{10}=50$

Stimmen nach der Wahl: A: 208 , B: 169 , C: 123

$WZ=50$

A	$\lfloor \frac{208}{50} \rfloor = \lfloor 4{,}16 \rfloor = 4$	--> 4 Mandate
B	$\lfloor \frac{169}{50} \rfloor = \lfloor 3{,}38 \rfloor = 3$	--> 3 Mandate
C	$\lfloor \frac{123}{50} \rfloor = \lfloor 2{,}46 \rfloor = 2$	--> 2 Mandate
	Σ	9 Grundmandate + 1 Restmandat

4.2 Wahlzahl festgelegt

Man könnte aber auch schon vor der Wahl festlegen, wie viele Stimmen ein Mandat ergeben sollen.

Ist die **Wahlzahl im Vorhinein festgelegt**, dann ergibt sich die Gesamtzahl der Mandate erst mit der Wahl. In diesem Fall sind **keine Restmandate** vorgesehen.

Beispiel (Fortsetzung)

Wahlzahl: 40 (festgelegt) Stimmenanzahl: 500 Ergebnis der Wahl: A: 208 , B: 169 , C: 123

$WZ=40$

A	$\lfloor \frac{208}{40} \rfloor = \lfloor 5{,}20 \rfloor = 5$	--> 5 Mandate
B	$\lfloor \frac{169}{40} \rfloor = \lfloor 4{,}23 \rfloor = 4$	--> 4 Mandate

C $\lfloor \frac{123}{40} \rfloor = \lfloor 3{,}08 \rfloor = 3$ --> 3 Mandate

Σ 12 Grundmandate

4.3 Wahlzahl variabel (Quasi-Quotenverfahren)

Unser Beispiel zeigt, dass die Wahlzahl die Grundmandate bestimmt. Für die Zuteilung von Restmandaten gibt es dann unterschiedliche Methoden. Bei Hare-Niemeyer nach der Größe der dezimalen Reste.

Damit das **Quotenverfahren mit festgelegter Mandatszahl** zu **keinen Restmandaten** führt, muss die Wahlzahl verändert werden.

Ein **Quotenverfahren mit veränderter Wahlzahl** nennt man ein **Quasi-Quotenverfahren**.

Beispiel (Fortsetzung)

Mandate: **10** (nicht variabel) - Stimmenanzahl: 500 - Stimmen nach der Wahl: A: 208 , B: 169 , C: 123

Die genuine Wahlzahl $WZ=50$ führt zu 9 Grundmandaten, wodurch noch 1 Mandat offenbleibt.

Die abgesenkte Wahlzahl $WZ=42$ gleich zu 10 Grundmandaten**!!!** (Tabelle)

$WZ=50$

A $\lfloor \frac{208}{50} \rfloor = \lfloor 4{,}16 \rfloor$ --> 4 Mandate

B $\lfloor \frac{169}{50} \rfloor = \lfloor 3{,}38 \rfloor$ --> 3 Mandate

C $\lfloor \frac{123}{50} \rfloor = \lfloor 2{,}46 \rfloor$ --> 2 Mandate

Σ 9 Mandate

\+ 1 Restmandat

$WZ=42$

A $\lfloor \frac{208}{42} \rfloor = \lfloor 4{,}84 \rfloor$ --> 4 Mandate

B $\lfloor \frac{169}{42} \rfloor = \lfloor 4{,}02 \rfloor$ --> 4 Mandate

C $\lfloor \frac{123}{42} \rfloor = \lfloor 2{,}93 \rfloor$ --> 2 Mandate

Σ 10 Mandate

\+ 0 Restmandat

4.4 Perfekte Wahlzahl bei vorgegebener Mandatszahl

Beispiel (Fortsetzung)

Variiert man die Wahlzahl WZ im Intervall $¿-\infty,0¿$, so ergeben sich für die Parteien folgende Mandatszuteilungen.

Partei A		Partei B		Partei C	
WZ ∊	$\lfloor 208/WZ \rfloor$	**WZ ∊**	$\lfloor 169/WZ \rfloor$	**WZ ∊**	$\lfloor 123/WZ \rfloor$
]∞ , 208[	0	]∞ , 169[	0	]∞ , 123[	0
[**208**, 104[	1	[**169**, 84.5[	1	[**123**, 61.5[	1
[**104**, 69.3[	2	[**84.5**, 56.3[	2	[**61.5**, 41[	2
[**69.3**, 52[	3	[**56.3**, 42.3[	3	[**41**, 30.8[	3
[**52**, 41.6[	4	[**42.3**, 33.8[	4	[**30.8**, 24.6[	4
[**41.6**, 34.7[	5	[**33.8**, 28.2[	5	[**24.6**, 20.5[	5
…	…	…	…	…	…

Die Tabelle zeigt, dass man mit einer Wahlzahl $WZ \in$ ¿ auf genau 10 Grundmandate kommt, und man sich dadurch das Restmandat erspart.

Σ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**	12	12	13	…	…
C	0	0	1	1	1	1	2	2	2	**2**	3	3	3	3	…
B	0	1	1	1	2	2	2	3	3	**4**	4	4	4	5	…
A	1	1	1	2	2	3	3	3	4	**4**	5	5	6	…	…
	208	**169**	**123**	**104**	**84,5**	**69,3**	**61,5**	**56,3**	**52**	**42,3**	**41,6**	**41**	**34,7**	**33,8**	**…**

Bemerkung
Die unteren **Intervallgrenzen** sind hervorgehoben. Ab dieser Grenzen gibt es jeweils ein zusätzliches Mandat. Interessant ist, dass die Mandatsgrenzen genau die **d'Hondtschen Zahlen** sind und man so auf die gleiche Mandatsverteilung kommt.

Wahlzahl und d'Hondtsches Verfahren
Das d'Hondtsche Verfahren entspricht im Ergebnis exakt dem Quasi-Quotenverfahren mit perfekter Wahlzahl!

5 Gütekriterien

Quotenkriterium

Die Quoten sollten annähernd den Idealquoten entsprechen. Sie sollten die abgerundete Idealquote nicht unter- und die aufgerundete Idealquote nicht überschreiten!

$$\lfloor \frac{s_P}{S} \rfloor \leq \frac{m_P}{M} \leq \lceil \frac{s_P}{S} \rceil$$

Das folgende Beispiel verletzt das Quotenkriterium!

Mandate: 10 Stimmenanzahl: 290 Stimmen: A: 200, B: 50, C: 40

	A	**B**	**C**
Stimmen	200	50	40
Idealquoten	0,690	0,172	0,138
Idealmandatsverteilung	6,90	1,72	1,38
Divisorverfahren	8 ☹	1	1
Quotenverfahren	7	2	1

Hier sieht man einen **Nachteil des Divisorverfahrens** (z.B. d'Hondt). **Es bevorzugt große Parteien** und erfüllt dadurch nicht immer das Quotenkriterium! Aus diesem Grund wurde das d'Hondtsche Verfahren für den Bundestag in Deutschland abgeschafft.

Nur Quotenverfahren mit höchstens einem Restsitz pro Partei erfüllen immer die Quotenbedingung.

Hausmonotonie

Eine Vergrößerung der Gesamtzahl der zu verteilenden Sitze darf niemals die Anzahl der Sitze für eine Partei verringern und umgekehrt. Nur Divisorverfahren erfüllen die Hausmonotonie. (*Wikipedia*)

Stimmenmonotonie

Ein Stimmenzuwachs der einen Partei darf niemals zu Mandatsverschiebungen zwischen zwei anderen Parteien führen. Nur Divisorverfahren erfüllen die Stimmenmonotonie. (*Wikipedia*)

Weitere Gütekriterien

Es gibt noch weitere Gütekriterien (siehe *Wikipedia*), allerdings gibt es kein perfektes Sitzzuteilungsverfahren, das alle Gütekriterien erfüllt.

Es gibt kein perfektes Sitzverteilungsverfahren! (Unmöglichkeitssatz von Baliski u. Young)

6 Übungsbeispiel

In Österreich sind für den Nationalrat 183 Sitze zu vergeben. Oberösterreich stehen gemäß seiner Einwohnerzahl 32 Mandate zu. Dazu wird das Verfahren von Hare-Niemeyer angewandt.

Aufgabenstellung

Berechne selbst die Mandatszahl und bestätige dadurch die Behauptung.

Bundesland	Fläche in km²	Bevölkerungsstand [1] 1981	1991	2001	2011	2015
		in 1.000				
Burgenland	3.962	269,8	270,9	277,6	285,7	288,2
Kärnten	9.538	536,2	547,8	559,4	556,2	557,4
Niederösterreich	19.186	1.427,8	1.473,8	1.545,8	1.614,7	1.636,3
Oberösterreich	11.980	1.269,5	1.333,5	1.376,8	1.413,8	1.436,8
Salzburg	7.156	442,3	482,4	515,3	529,1	538,3
Steiermark	16.401	1.186,5	1.184,7	1.183,3	1.208,6	1.221,0
Tirol	12.640	586,7	631,4	673,5	709,3	728,5
Vorarlberg	2.601	305,2	331,5	351,1	370,4	378,5
Wien	415	1.531,3	1.539,8	1.550,1	1.714,2	1.794,8
ÖSTERREICH	**83.879**	**7.555,3**	**7.795,8**	**8.032,9**	**8.401,9**	**8.579,7**

[1] 1981, 1991, 2001, 2011: Volkszählungsergebnisse;

Quelle: STATISTIK AUSTRIA